Indécomposabilité des graphes et des tournois

Houmem Belkhechine

UNIVERSITÉ DE SFAX **UNIVERSITÉ CLAUDE-BERNARD LYON I**

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité :

MATHÉMATIQUE

Titre :

INDÉCOMPOSABILITÉ DES GRAPHES ET DES TOURNOIS

par

HOUMEM BELKHECHINE

soutenue publiquement le 15 juillet 2009

JURY :

M. Hèdi BEN MESSAOUD	Université de Sfax	*Président*
M. Adrian BONDY	Université Claude-Bernard Lyon 1	*Examinateur*
M. Youssef BOUDABBOUS	Université de Sfax	*Directeur*
M. Michel HABIB	Université Paris Diderot-Paris 7	*Rapporteur*
M. Mohamed MKAOUAR	Université de Sfax	*Examinateur*
M. Maurice POUZET	Université Claude-Bernard Lyon 1	*Directeur*
M. Stéphan THOMASSÉ	Université Montpellier 2	*Rapporteur*

À mes parents

Remerciements

Cette thèse a été préparée dans le cadre d'une cotutelle entre l'Université de Sfax et l'Université Claude-Bernard Lyon 1. Je remercie les deux institutions pour leur soutien matériel. Je remercie également le CMCU Franco-Tunisien, le programme d'échange DGRST, ainsi que l'Institut Français de Coopération.

Je remercie les professeurs Youssef BOUDABBOUS et Maurice POUZET pour leur engagement dans la direction de cette thèse et pour leur suivi de l'évolution des travaux de ses différentes étapes.

Ce travail doit beaucoup à l'amitié de Monsieur Imed BOUDABBOUS, à son accueil et à sa collaboration. Je le remercie avec l'expression de mon meilleur sentiment.

Je remercie les professeurs Michel HABIB et Stéphan THOMASSÉ pour l'intérêt qu'ils me suscitent et pour le plaisir qu'ils me font en rapportant sur mon travail et en faisant partie du Jury.

Je remercie le professeur Hèdi BEN MESSAOUD pour avoir accepté de présider le Jury.

Mes remerciements s'adressent également aux professeurs Adrian BONDY et Mohamed MKAOUAR pour avoir bien voulu être membres du Jury.

Je remercie enfin tous les membres de l'équipe de combinatoire de la Faculté des Sciences de Sfax pour leur serviabilité et leur ambiance conviviale.

Table des matières

Résumé

Cette thèse porte sur l'indécomposabilité dans les graphes et les tournois. Elle comporte cinq chapitres dont le premier est introductif. Le deuxième chapitre consiste en une étude des tournois indécomposables suivant les tournois indécomposables à 5 ou à 7 sommets qu'ils abritent [3, 2]. Le troisième chapitre est une caractérisation des tournois (-1)-critiques avec une description morphologique de ces tournois [4, 5]. Le quatrième chapitre contient une caractérisation des graphes (-1)-critiques [6], répondant ainsi, dans le cas général, à un problème posé par Y. Boudabbous et P. Ille [10]. Le cinquième chapitre est consacré à une opération d'inversion dans les tournois et un invariant, l'*indice d'inversion d'un tournoi*, dont l'étude a été proposée par M. Pouzet. Le fait que les tournois (-1)-critiques sont d'indice entre 2 et 4 est le lien avec l'étude de la criticalité. Plusieurs propriétés de la classe des tournois d'indice au plus n sont données.

Chapitre 1

Introduction et présentation des résultats

Ce travail porte sur l'indécomposabilité dans les graphes et les tournois. La notion d'indécomposabilité est basée sur celle d'intervalle. Un *intervalle* d'un graphe G, orienté ou non, est une partie I de l'ensemble des sommets de G telle que les liaisons éventuelles d'un sommet x extérieur à I à un sommet y de I soient indépendantes de y. Pour tout graphe G, l'ensemble des sommets, l'ensemble vide et les singletons sont des intervalles, dits *triviaux*. S'il n'y en a pas d'autres le graphe est dit *indécomposable*. La notion d'intervalle est l'extension aux graphes de la notion familière d'intervalle de la droite réelle. Elle a été explicitement introduite (sous d'autres noms : partie homogène, partie autonome, etc.) en théorie des graphes et en théorie des ordres, par divers auteurs, dont T. Gallai en 1967 et en théorie des relations par R. Fraïssé (Cours de Logique Mathématique, t1, Gauthier-Villars, Paris 1971). Son importance tient à celle de la notion de somme lexicographique (qui elle remonte aux travaux de G. Cantor et F. Hausdorff). En effet, lorsqu'on étudie une propriété de graphes ou d'ordres, il est naturel d'étudier son comportement vis à vis des sommes lexicographiques. On est alors amené à considérer les structures dont les décompositions en sommes lexicographiques sont triviales. Comme les intervalles d'un graphe sont exactement les blocs apparaissant dans les décompositions de celui-ci en sommes lexicographiques, ces structures sont exactement les graphes indécomposables définis ci-dessus.

Les notions d'intervalle, de somme lexicographique et de graphe indécomposable sont au centre de l'article de T. Gallai (1967) caractérisant les graphes de comparabilité. Depuis cet article, l'importance de ces notions s'est affirmée dans de nombreux travaux. Mentionnons par exemple les travaux de M. Habib, Substitution des structures combinatoires. Théorie et algorithmes, Thèse, PARIS, (1981) ; R. Möhring, Algorithmic aspects of comparability graphs and interval graphs, in Graphs and Order, I. Rival ed. Kluwer, pp. 41-101, (1985) ; D. Kelly, Comparability graphs, in Graphs and Order I. Rival ed. Kluwer, pp. 3-40, (1985) ; P. Ille, L'ensemble des intervalles d'une multirelation binaire et réflexive, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 37, no. 3, pp. 227-256, (1991) ; J.H. Schmerl et W. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113, pp. 191-205, (1993) ; les travaux de A. Ehrenfeucht et G. Rozenberg ainsi que l'ouvrage de A. Ehrenfeucht, T. Harju et G. Rosenberg : The theory of 2-structures, World Scientific, (1999), rassemblant les nombreux résultats obtenus en se plaçant dans le cadre des structures relationnelles binaires. J.H. Schmerl et W. Trotter (1993) et indépendemment P. Ille (1990) ont montré qu'un graphe et plus généralement une structure relationnelle binaire indécomposable sur n sommets ($n \geq 7$) a au moins une restriction indécomposable à $n-2$ sommets. Ils ont introduit les structures *critiques*, celles pour lesquelles la suppression de n'importe quel sommet détruit l'indécomposabilité et caractérisé les ordres, les graphes et autres structures critiques. Y. Bouddabous et P. Ille (2006) ont introduit la notion de *structure (-1)-critique* : structure indécomposable telle que la suppression de tout sommet, sauf un, détruit l'indécomposabilité. Ils ont posé la question de la description de ces structures.

C'est dans le prolongement de ces travaux que se situe notre contribution.

Nous donnons une description complète des graphes et tournois (-1)-critiques. Cette description fait apparaître des classes de graphes et de tournois qui possèdent des propriétés de régularité manifestes. Pour prendre en compte ces propriétés, nous introduisons une notion d'inversion dans les tournois, voisine de celle de Slater (1961), et un invariant, l'*indice d'inversion d'un tournoi* que, suivant une suggestion du professeur A. Bondy, nous appelons *l'indice de Pouzet*. Nous montrons que les tournois critiques sont d'indice 1 ou 2 et que les tournois (-1)-critiques sont d'indice entre 2 et 4. Nous mettons en évidence des propriétés remarquables de la classe des tournois d'indice au plus n, par exemple le fait qu'elle est déterminée par un nombre fini d'obstructions. Nous présentons les résultats obtenus dans les quatre chapitres suivants. Le chapitre 2 consiste en une étude des tournois indécomposables suivant les tournois indécomposables à 5 ou à 7 sommets qu'ils abritent [3, 2]. Le chapitre 3 est une caractérisation des tournois (-1)-critiques avec une description morphologique de ces tournois [4, 5]. Le chapitre 4 contient une caractérisation des graphes (-1)-critiques [6]. Le cinquième chapitre est consacré à l'opération d'inversion dans les tournois. Nous avons obtenu les résultats du chapitre 2 avec I. Boudabbous, du chapitre 3 avec I. Bouddabous et J. Dammak, du chapitre 4 avec I. Boudabbous et M.B. Elayech, du chapitre 5 avec M. Bouaziz, I. Boudabbous et M. Pouzet. Les résultats des chapitres 2 et 3 sont publiés.

Afin de présenter les résultats dans le détail, nous commençons par définir les notions et les objets de base de notre travail. Quelques notions et notations sont introduites sans être définies. Leurs définitions font l'objet de la dernière section. Un *graphe orienté* (ou simplement graphe) est un couple $G := (S, A)$ dans lequel S est un ensemble, appelé ensemble des *sommets* de G et A est un ensemble de couples de sommets distincts de G, appelé ensemble des *arcs* de G. On designe par $S(G)$ l'ensemble des sommets de G et par $A(G)$ l'ensemble de ses arcs. Un graphe est fini lorsque son ensemble de sommets est fini, sinon il est infini. Le *graphe vide* est le graphe dont l'ensemble des sommets, et donc l'ensemble des arcs, est vide. Dans les chapitres 2, 3 et 4, seuls les graphes finis et non vides sont considérés. Un graphe signifie alors un graphe fini et non vide dans chacun de ces trois chapitres. L'*ordre* ou le *cardinal* du graphe G est le cardinal de son ensemble de sommets.

Un *tournoi* est un graphe $T := (S, A)$ tel que pour tous $x \neq y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(y, x) \notin A$. On note $x \longrightarrow y$, et on dit que x *domine* y, pour signifier que (x, y) est un arc du tournoi T. Un tournoi *transitif* est un tournoi qui n'abrite pas le *3-cycle* $C_3 := (\{0, 1, 2\}, \{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\})$. Pour un tournoi fini remarquable, désigné par une lettre indexée, nous faisons en sorte que l'indice représente l'ordre du tournoi. Pour un tournoi transitif, la notation $x < y$ signifie $x \longrightarrow y$. La notation $T = a_0 < \cdots < a_n$ signifie que T est le tournoi transitif défini sur $S := \{a_0, \cdots, a_n\}$ par $A(T) := \{(a_i, a_j) : i < j\}$. Pour $E \subseteq \mathbb{R}$, le tournoi transitif usuel sur E, noté $\underline{E}$, est défini par $A(\underline{E}) := \{(x, y) \in E \times E : x < y\}$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose

$\mathbb{N}_m := \{0, \cdots, m\}$. Le tournoi $\underline{\mathbb{N}_n}$, où $n \in \mathbb{N}$, est aussi noté $\mathcal{O}_{n+1}$. On convient que $\mathcal{O}_0$ désigne le tournoi vide, c'est-à-dire $\mathcal{O}_0 = (\emptyset, \emptyset)$. Une *inversion* d'un arc $a := (x, y)$ dans un graphe G est l'opération qui consiste à remplacer (dans G) l'arc a par $a^\star := (y, x)$. Par exemple le graphe *dual* de G, noté $G^\star$, est le graphe obtenu à partir de G en inversant tous ses arcs. P. Slater [31] s'est intéressé, dans le cas d'un tournoi fini T, au nombre minimum d'arcs qu'il faut inverser dans le tournoi T pour le ramener à un tournoi transitif. Ce nombre, noté $s(T)$, est appelé *indice de Slater* de T. Un tournoi transitif obtenu à partir du tournoi T après une inversion de $s(T)$ arcs est appelé *ordre médian* ou *ordre de Slater* de T. Ayant travaillé dans le passé sur les ordres médians d'un tournoi [1], j'ai une tendance naturelle à donner une présentation optimale d'un tournoi par des inversions d'arcs à partir d'un tournoi transitif. Monsieur M. Pouzet suggérait alors que nous nous intéressions à l'opération qui consiste à inverser une partie X de l'ensemble des sommets d'un tournoi T (fini ou non), c'est-à-dire, à inverser tous les arcs $(x, y) \in A(T)$ tels que x et y sont dans X. Le tournoi obtenu à partir de T après l'inversion de tels arcs est noté $Inv(X, T)$. Pour une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ de parties de sommets de T, le tournoi obtenu à partir de T en inversant successivement les parties $X_1, \cdots, X_m$, est noté $Inv((X_1, \cdots, X_m), T)$. L'*indice d'inversion* d'un tournoi non transitif est, lorsqu'il existe, le plus petit entier

$m := i(T)$ tel que $Inv((X_i)_{1\leq i\leq m}, T)$ est un tournoi transitif. On convient que l'indice d'un tournoi transitif est nul. Notons que lorsque le tournoi T est fini, $i(T)$ existe et on a $i(T) \leq s(T)$. Par exemple, dans le cas des tournois critiques, caractérisés par J. H. Schmerl et W. T. Trotter en 1993 [30], nous observons le fait suivant : l'indice de Slater d'un tournoi critique d'ordre n n'est pas borné, tandis que l'indice d'inversion d'un tel tournoi est inférieur ou égal à 2. Cela nous amène à une présentation simple de ces tournois par l'inversion d'au plus deux parties à partir d'un tournoi transitif. Cette présentation est alors différente de celle des références citées. Nous illustrons ceci en introduisant les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1} que nous définissons à l'aide d'inversions à partir de $\mathcal{O}_{2n+1}$ comme suit :

- $U_{2n+1} := Inv(2\mathbb{N}_n, \mathcal{O}_{2n+1})$ (Voir figure 1.1) ;
- $T_{2n+1} := Inv((2\mathbb{N}_n, 2\mathbb{N}_{n-1} + 1), \mathcal{O}_{2n+1})$ (Voir figure 1.2) ;
- $V_{2n+1} := Inv((2\mathbb{N}_n, 2\mathbb{N}_{n-1}), \mathcal{O}_{2n+1})$ (Voir figure 1.3) ;

  où, pour $m \in \mathbb{N}$, $2\mathbb{N}_m := \{2i : i \in \mathbb{N}_m\}$ et $2\mathbb{N}_m + 1 := \{2i + 1 : i \in \mathbb{N}_m\}$.

Théorème 1.0.1 ([30])**.** *À des isomorphismes près, les tournois critiques sont les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1}, où $n \geq 2$.*

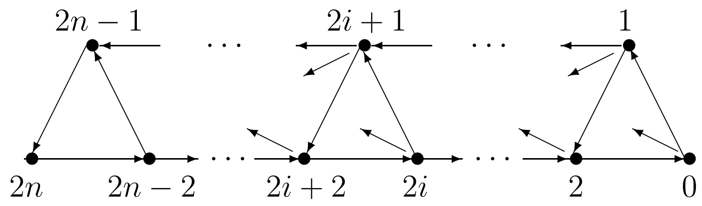

Figure 1.1 : U_{2n+1}

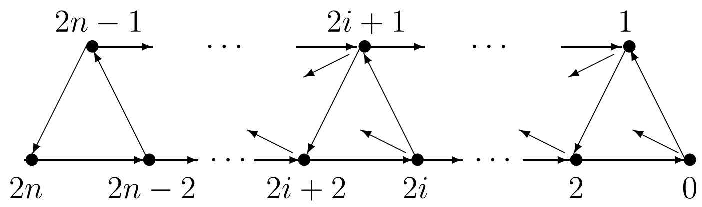

Figure 1.2 : T_{2n+1}

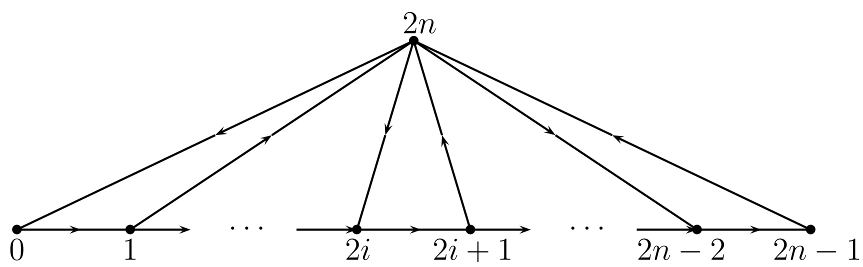

Figure 1.3 : V_{2n+1}

Nous présentons les principaux résultats dans les quatre sections qui suivent. Les graphes et les tournois considérés dans les trois premières sections sont finis.

1.1 Tournois indécomposables et leurs sous-tournois indécomposables à 5 ou 7 sommets

Les tournois considérés dans cette section sont finis. Nous rappelons d'abord la proposition suivante.

Proposition 1.1.1 ([13]). *Soit $G := (S, A)$ un graphe indécomposable. Si X est une partie de S telle que $\mid X \mid \geq 3$, $\mid S - X \mid \geq 2$ et $G(X)$ est indécomposable, alors il existe deux sommets distincts x et y de $S - X$ tels que $G(X \cup \{x, y\})$ est indécomposable.*

Le 3-cycle C_3 s'abrite dans tout tournoi indécomposable d'ordre ≥ 3. Il s'ensuit d'après la proposition 1.1.1, que tout tournoi indécomposable d'ordre ≥ 5 admet un sous-tournoi indécomposable à 5 sommets. Les tournois indécomposables à 5 sommets sont critiques car les quatre tournois à 4 sommets sont décomposables. Notons alors la remarque suivante.

Remarque 1.1.1. *Les tournois indécomposables à 5 sommets sont, à des isomorphismes près, les trois tournois critiques T_5, U_5 et V_5.*

Nous étudions les tournois indécomposables suivant les tournois indécomposables à 5 sommets qu'ils abritent. Un résultat récent sur le sujet est une caractérisation des tournois indécomposables omettant V_5, obtenue par B. J. Latka [24]. Afin de rappeler cette caractérisation, nous introduisons le tournoi de *Paley* P_7 [22] défini sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ par $A(P_7) := \{(i,j) : j-i \in \{1,2,4\}\}$. Notons que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $P_7 - x \simeq P_7 - y$ et posons $B_6 := P_7 - 6$.

Théorème 1.1.1 ([24]). *À des isomorphismes près, les tournois indécomposables à au moins 5 sommets et omettant V_5 sont les tournois B_6, P_7, U_{2n+1} et T_{2n+1}, où $n \geq 2$.*

Nous montrons le théorème suivant.

Théorème 1.1.2. *Étant donné un tournoi T indécomposable et non isomorphe à un élément de $\{T_{2n+1} : n \geq 2\}$, si T abrite T_5 alors T abrite U_5 et V_5.*

Soit T un tournoi indécomposable d'ordre ≥ 5 et soit $I_5(T)$ l'ensemble des éléments de $\{T_5, U_5, V_5\}$ qui s'abritent dans T. D'après la remarque 1.1.1, $I_5(T) \neq \emptyset$. D'après le théorème 1.1.2, $I_5(T) \neq \{T_5, U_5\}$ et $I_5(T) \neq \{T_5, V_5\}$. Nous caractérisons les tournois indécomposables T tels que $I_5(T) = \{T_5\}$ (resp. $I_5(T) = \{U_5\}$). La remarque suivante complète cette discussion.

Remarque 1.1.2. *Pour $J := \{V_5\}$, $\{U_5, V_5\}$ ou $\{T_5, U_5, V_5\}$ et pour $n \geq 6$, il existe un tournoi indécomposable T d'ordre n, tel que $I_5(T) = J$.*
Pour $n \geq 5$, les tournois E_{n+1}, F_{n+1} et G_{n+1} définis ci-dessous sur $\mathbb{N}_n$ sont indécomposables et vérifient $I_5(E_{n+1}) = \{T_5, U_5, V_5\}$, $I_5(F_{n+1}) = \{V_5\}$ et $I_5(G_{n+1}) = \{U_5, V_5\}$.

– $E_{n+1}(\mathbb{N}_4) := T_5$ *et pour tout* $5 \leq k \leq n$, $V^+_{E_{n+1}(\mathbb{N}_k)}(k) := \{k-1\}$ *;*

– $A(F_{n+1}) := \{(i,j) : i+1 < j$ *ou* $i = j+1\}$ *;*

– $G_n(\mathbb{N}_{n-1}) := F_n$ *et* $V^+_{G_{n+1}}(n) := \{0\}$.

Le corollaire suivant découle des théorèmes 1.1.2 et 1.1.1

Corollaire 1.1.1.

1. *À des isomorphismes près, les tournois indécomposables* T *tels que* $I_5(T) = \{T_5\}$ *sont les tournois* T_{2n+1}*, où* $n \geq 2$.
2. *À des isomorphismes près, les tournois indécomposables* T *tels que* $I_5(T) = \{U_5\}$ *sont les tournois* B_6*,* P_7 *et* U_{2n+1}*, où* $n \geq 2$.

Pour tout $n \geq 6$, le tournoi F_n défini à la remarque 1.1.2, est un tournoi indécomposable, non critique et tel que $I_5(F_n) = \{V_5\}$. Cela nous amène à la caractérisation suivante des tournois V_{2n+1}.

Proposition 1.1.2. *Étant donné un tournoi indécomposable* T *à au moins 7 sommets,* T *est isomorphe à* V_{2n+1} *pour un* $n \geq 3$ *si et seulement si tous les sous-tournois indécomposables à 7 sommets de* T *sont isomorphes à* V_7.

De la proposition 1.1.2 et du corollaire 1.1.1, nous dégageons une nouvelle propriété caractéristique des tournois critiques.

Proposition 1.1.3. *Étant donné un tournoi indécomposable* T *à au moins 7 sommets,* T *est critique si et seulement si il existe* $W \in \{T_7, U_7, V_7\}$*, tel que les sous-tournois indécomposables à 7 sommets de* T *sont isomorphes à* W.

1.2 Morphologie des tournois (-1)-critiques

La caractérisation des graphes (-1)-critiques est une question posée par Y. Boudabbous et P. Ille dans un article récent dans lequel ces auteurs étudient le comportement des sommets critiques dans un graphe indécomposable [10].

La notion de *graphe d'indécomposablité* a été introduite par P. Ille [8, 20, 21] de la façon suivante. À chaque graphe indécomposable $G := (S, A)$ d'ordre ≥ 3, est associé son graphe d'indécomposabilité $I(G)$ défini, en tant que graphe simple sur S, comme suit. Pour tous $x \neq y \in S$, $\{x, y\}$ est une arête de $I(G)$ si $G - \{x, y\}$ est indécomposable. Ce graphe est un outil important dans notre construction des tournois (-1)-critiques.

Afin de décrire les graphes d'indécomposabilité possibles d'un tournoi (-1)-critique, nous introduisons le *chemin* P_n de longueur $n-1 \geq 0$ défini, en tant que graphe simple sur $\mathbb{N}_{n-1}$, comme suit. Pour tous i, $j \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\{i, j\}$ est une arête de P_n si $\mid i - j \mid= 1$. On appelle chemin tout graphe simple isomorphe à P_n. Un sommet d'un chemin est une *extrémité* s'il est de degré 1 ; sinon il est un sommet *interne*.

Rappelons les deux lemmes suivants.

Lemme 1.2.1 ([10])**.** *Soient $G := (S, A)$ un graphe indécomposable et x un sommet critique de G. Alors $d_{I(G)}(x) \leq 2$ et on a :*

- *Si* $V_{I(G)}(x) = \{y\}$, *où* $y \in S$, *alors* $G - \{x, y\}$ *est un intervalle de* $G - x$.
- *Si* $V_{I(G)}(x) = \{y, z\}$, *où* $y \neq z \in S$, *alors* $\{y, z\}$ *est un intervalle de* $G - x$.

Lemme 1.2.2 ([10])**.** *Le graphe d'indécomposabilité d'un graphe (-1)-critique admet une unique composante connexe de cardinal* ≥ 2.

Nous complétons le lemme 1.2.1 dans le cas des tournois (-1)-critiques comme suit.

Lemme 1.2.3. *Étant donné un tournoi (-1)-critique* T, *le sommet non critique* a *de* T *vérifie* $d_{I(T)}(a) = 2$.

Le lemme 1.2.2 nous amène à associer à chaque graphe (-1)-critique G d'ordre ≥ 7, le sous-graphe $I'(G)$ de $I(G)$, induit par sa composante connexe non réduite à un singleton. Nous établissons alors le résultat suivant.

Lemme 1.2.4. *Si* T *est un tournoi (-1)-critique, alors* $I'(T)$ *est un chemin dans lequel le sommet non critique est un sommet interne. De plus,* $I(T)$ *admet au plus deux sommets isolés.*

Nous construisons les tournois (-1)-critiques à partir des différents graphes d'indécomposabilité possibles pour de tels tournois. Afin de présenter ces tournois, nous introduisons pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n-2\}$, les tournois E^{2k+1}_{2n+1}, F^{2k+1}_{2n+1}, G^{2k+1}_{2n+1} et H^{2k+1}_{2n+1} que nous définissons à l'aide d'inversions à partir de $\mathcal{O}_{2n+1}$ comme suit :

1. $E^{2k+1}_{2n+1} := Inv((2\mathbb{N}_n, 2\mathbb{N}_k, 2\mathbb{N}_n - 2\mathbb{N}_k), \mathcal{O}_{2n+1})$;

2. $F_{2n+1}^{2k+1} := Inv((2\mathbb{N}_n, 2\mathbb{N}_n - 2\mathbb{N}_k), \mathcal{O}_{2n+1})$;

3. $G_{2n+1}^{2k+1} := Inv((2\mathbb{N}_n, 2\mathbb{N}_{n-1}, 2\mathbb{N}_k), \mathcal{O}_{2n+1})$;

4. $H_{2n+1}^{2k+1} := Inv((2\mathbb{N}_k, 2\mathbb{N}_{k-1}, 2\mathbb{N}_n - 2\mathbb{N}_{k-1}, 2\mathbb{N}_{n-1} - 2\mathbb{N}_{k-1}), \mathcal{O}_{2n+1})$.

Remarque 1.2.1. *Étant donné un entier $n \geq 3$, pour tout entier $1 \leq k \leq n-2$, $(E_{2n+1}^{2k+1})^\star \simeq E_{2n+1}^{2(n-k-1)+1}$ et $(H_{2n+1}^{2k+1})^\star \simeq H_{2n+1}^{2(n-k-1)+1}$.*

Théorème 1.2.1. *À des isomorphismes près, les tournois (-1)-critiques sont les tournois E_{2n+1}^{2k+1}, F_{2n+1}^{2k+1}, $(F_{2n+1}^{2k+1})^\star$, G_{2n+1}^{2k+1}, $(G_{2n+1}^{2k+1})^\star$ et H_{2n+1}^{2k+1}, où $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n-2$. De plus, le sommet $2k+1$ est l'unique sommet non critique de chacun de ces tournois.*

Remarquons alors que les tournois (-1)-critiques sont d'ordre impair $m \geq 7$ et que pour chaque entier impair $m \geq 7$, il existe, à des isomorphismes près, exactement $3m - 15$ tournois (-1)-critiques d'ordre m.

1.3 Les graphes (-1)-critiques

Nous caractérisons les graphes (-1)-critiques d'ordre au moins égal à 7, donnant ainsi une réponse complète au problème posé dans [10]. Nous présentons d'abord les outils utilisés à cet effet.

Afin de décrire les différents graphes d'indécomposabilité possibles d'un graphe (-1)-critique, nous introduisons, outre le chemin P_n, les graphes simples suivants. Le *cycle* C_n de longueur $n \geq 3$ est le graphe simple obtenu à partir de P_n en ajoutant l'arête $\{0, n-1\}$. On appelle *cycle* tout graphe simple isomorphe à C_n. Un *arbre* est un graphe simple connexe et sans cycles. Un arbre *étoilé* est un arbre $\mathcal{A}$ admettant un et un seul sommet a tel que $d_{\mathcal{A}}(a) \geq 3$, appelé *source* de $\mathcal{A}$. Un arbre *a-étoilé* est un arbre étoilé de source a. Étant donné un arbre étoilé $\mathcal{A}$, une *branche* de $\mathcal{A}$ est un chemin de $\mathcal{A}$ dont les extrémités sont la source et un sommet de degré 1.

Le lemme 1.2.3 n'est plus vrai dans le cas des graphes (-1)-critiques. Nous établissons alors le résultat suivant, où l'on dit qu'un graphe indécomposable G est *(-1)-critique* en a pour signifier que a est l'unique sommet non critique de G.

Proposition 1.3.1. *Étant donné un graphe G d'ordre au moins égal à 7 et (-1)-critique en a, $I(G)$ admet au plus deux sommets isolés et l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

- *$I(G)$ est un cycle de longueur impaire.*
- *$I'(G)$ est un chemin de longueur ≥ 4.*
- *$I'(G)$ est un arbre a-étoilé dont toutes les branches sont de longueurs ≥ 2. De plus, ou bien $I(G) = I'(G)$ et $I'(G)$ admet une unique branche de longueur impaire, ou bien $I(G)$ admet au plus un sommet isolé et toutes les branches de $I'(G)$ sont de longueurs paires.*

Nous construisons les graphes (-1)-critiques à partir des différents graphes d'indécomposabilité possibles pour de tels graphes. Afin de présenter les graphes (-1)-critiques dont le graphe d'indécomposabilité est un cycle, nous introduisons le graphe

H_{2p+1} défini sur $\mathbb{N}_{2p}$ comme suit : pour tous $x \neq y \in \mathbb{N}_{2p}$, (x, y) est un arc de H_{2p+1} si : ou bien $x < y$, x est pair et y est impair ; ou bien $x > y$ et x et y sont de même parité. Notons que H_{2p+1} est autodual en munissant $\mathbb{N}_{2p}$ de l'addition modulo $2p+1$ et en considérant la permutation $i \longmapsto -i$.

Proposition 1.3.2. *À des isomorphismes près, les graphes (-1)-critiques d'ordre ≥ 7 et dont le graphe d'indécomposabilité est un cycle sont H_{2p+1} et son complémentaire $\overline{H_{2p+1}}$, où $p \geq 3$. De plus, 0 est le sommet non critique de H_{2p+1}.*

Nous introduisons maintenant le graphe R_{2n+1} défini sur $\mathbb{N}_{2n}$, où $n \geq 2$, comme suit : $(2\mathbb{N}_{n-1} + 1) \longrightarrow 2n \longrightarrow 2\mathbb{N}_{n-1}$ et pour tous $x \neq y \in \mathbb{N}_{2n-1}$, (x, y) est un arc de R_{2n+1} si $x < y$ et si x est impair ou y est pair. Nous montrons le résultat suivant.

Proposition 1.3.3. *À des isomorphismes près, les graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en a et tels que $I'(G)$ est un chemin et a est un sommet isolé de $I(G)$, sont R_{2n+1} et $\overline{R_{2n+1}}$, où $n \geq 3$.*

D'après la proposition 1.3.1, les graphes G (-1)-critiques en a, autres que ceux introduits dans les deux propositions ci-dessus, sont tels que $I'(G)$ est ou bien un chemin dans lequel a est un sommet, ou bien un arbre étoilé dans lequel a est la source. Dans le cas où $I'(G)$ est un chemin nous distinguons les cas suivant que a est une extrémité ou un sommet interne de ce chemin. Lorsque $I'(G)$ est un chemin P_m dans lequel a est un sommet interne, nous distinguons trois cas suivant les parités de

m et de a. Dans le cas où $I'(G)$ est un arbre étoilé, nous distinguons deux cas suivant que $I'(G)$ admet ou n'admet pas une branche de longueur impaire. Pour chacun des cas que nous avons décrit nous obtenons une classe de graphes (-1)-critiques. Nous obtenons ainsi six classes de graphes (-1)-critiques que nous présentons au chapitre 4. Nous terminons cette section en présentant, à titre indicatif, une de ces classes, à savoir la classe Ω_1 des graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en $2k+1$, tels que $I'(G) = P_{2n+1}$, où $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. Cette description s'appuie sur la relation d'équivalence $\equiv$ définie dans la dernière section.

Proposition 1.3.4. *Ω_1 est la classe des graphes G définis sur $\mathbb{N}_{2n}$, où $n \geq 3$, et vérifiant pour un $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, les conditions suivantes :*

- $(0,1) \not\equiv (2,1)$ *et* $(2k, 2k+2) \not\equiv (1,2)$.
- *Si* $(2k, 2k+2) \equiv (0,2)$ *alors* $(2n-2, 2n) \not\equiv (0,2)$.
- *Si* $k = 0$ *(resp. k=n-1), alors* $(2n-2, 2n) \not\equiv (1,2)$ *(resp.* $(0,2) \not\equiv (1,2)$*).*
- *Pour tous* $x < y \in \mathbb{N}_{2n}$*, on a :*
  - *si* x *et* y *ne sont pas tous deux pairs, alors* $(x,y) \equiv (1,2)$ *;*
  - *si* x *et* y *sont pairs, alors* $(x,y) \equiv (0,2)$, $(2n-2, 2n)$ *ou* $(2k, 2k+2)$*, suivant que* $y \leq 2k$, $x \geq 2k+2$ *ou que* $x \leq 2k < y$ *respectivement.*

De plus un graphe G de Ω_1 est (-1)-critique en $2k+1$ avec $I(G) = P_{2n+1}$.

1.4 Inversion dans les tournois

Les tournois considérés dans ce paragraphe sont finis ou infinis. Nous établissons d'abord que l'indice d'inversion d'un tournoi est arbitrairement grand. Plus précisément :

Proposition 1.4.1. *Pour tout entier n, il existe un tournoi fini T, tel que $i(T) = n$.*

Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on désigne par $i(n)$ (resp. $s(n)$), l'indice d'inversion (resp. l'indice de Slater) maximum d'un tournoi d'ordre n. P. Erdös et J.W. Moon [14] ont montré que $s(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor < \frac{n(n-1)}{4}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. J.C. Bermond [7] a démontré que $s(n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \rfloor$. On sait aussi que $s(n)$ est de l'ordre de $\frac{n^2}{4}$ [14]. Nous établissons l'encadrement suivant de $i(n)$.

Théorème 1.4.1. *Pour tout entier $n \geq 4$, $\frac{n-1}{2} - \log_2 n \leq i(n) \leq n - 3$.*

La minoration est établie par comptage ; nous avons obtenu la majoration par $n - 1$ au moyen du théorème 1.4.2 ci-dessous. Une majoration par $n - 2$ vient d'une suggestion du professeur S. Thomassé [32] que j'ai améliorée pour obtenir la majoration actuelle. Remarquons alors que $i(n)$ est d'ordre linéaire, tandis que $s(n)$ est d'ordre quadratique.

Il est connu que l'indice de Slater d'un tournoi fini T est la distance minimum du tournoi T à un tournoi transitif défini sur $S(T)$. Nous introduisons de même une distance d correspondant à notre inversion. Pour deux tournois finis et distincts $T := (S, A)$ et $T' := (S, A')$, $d(T, T) = 0$ et $d(T, T')$ est le plus petit nombre de parties qu'il faut inverser dans le tournoi T pour le ramener au tournoi T'. L'indice d'un tournoi fini T est alors la distance minimum de T à un tournoi transitif défini sur $S(T)$. Nous montrons le théorème suivant.

Théorème 1.4.2. *Pour tous tournois finis T et T' définis sur un même ensemble non vide S de n sommets, $d(T, T') \leq n - 1$. De plus, cette borne est atteinte.*

Nous nous intéressons ensuite à la classe $I_n^{<\omega}$, des tournois finis T, tels que $i(T) \leq n$. Il s'agit d'une classe héréditaire. Rappelons qu'une classe $\mathcal{C}$ de tournois est dite *héréditaire*, ou *close pour l'abritement*, si tout tournoi qui s'abrite dans un tournoi de $\mathcal{C}$ est encore un tournoi de $\mathcal{C}$. Une *borne* d'une telle classe $\mathcal{C}$ est un tournoi T n'appartenant pas à $\mathcal{C}$ et tel que pour tout $x \in S(T)$, $T - x$ est un tournoi de $\mathcal{C}$. On dit que la classe $\mathcal{C}$ est *déterminée par ses bornes*, lorsque tout tournoi n'abritant aucune des bornes de $\mathcal{C}$, est un tournoi de $\mathcal{C}$. Le fait qu'une classe héréditaire de tournois finis est déterminée par ses bornes est un cas particulier d'un résultat plus général sur les classes de relations [15]. Nous établissons en utilisant le lemme de Higman [19], que la classe $I_n^{<\omega}$ n'admet qu'un nombre fini de bornes. Nous obtenons alors le théorème suivant.

Théorème 1.4.3. *La classe $I_n^{<\omega}$ est déterminée par ses bornes et celles-ci sont en nombre fini.*

Dans le cas $n = 1$, nous explicitons les bornes de la classe $I_1^{<\omega}$ et nous en donnons une description morphologique. Rappelons à cet effet, la notion de *somme lexicographique*. Soit $T := (S, A)$ un tournoi défini sur $S := \mathbb{N}_m$, où $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in S$, on considère un tournoi $T_i := (S_i, A_i)$, où les S_i sont deux à deux disjoints. La somme lexicographique des tournois $(T_i)_{i\in S}$ suivant T, encore appelée T-*somme* des $(T_i)_{i\in S}$, est le tournoi $T(T_0, \cdots, T_m)$ défini sur $\bigcup\limits_{i=1}^{m} S_i$ comme suit. Pour tous $x \neq y \in \bigcup\limits_{i=0}^{m} S_i$, (x, y) est un arc de $T(T_0, \cdots, T_m)$ si et seulement si, ou bien (x, y) est un arc de l'un des T_i, ou bien $x \in S_i$, $y \in S_j$, où $i \neq j \in S$, et (i, j) est un arc de T.

On note $\mathbb{1}(x)$ le tournoi ayant x pour seul sommet, et on note $C(x, y, z)$ le 3-cycle $(\{x, y, z\}, \{(x, y), (y, z), (z, x)\})$. Nous introduisons les tournois $D_5 := C_3(C_3, \mathbb{1}(3), \mathbb{1}(4))$ et $C_6 := \mathcal{O}_2(C_3, C(3, 4, 5))$.

Nous montrons le théorème suivant.

Théorème 1.4.4. *À des isomorphismes près, les bornes de la classe $I_1^{<\omega}$ sont les tournois D_5, T_5, V_5, C_6 et B_6.*

Il découle des théorèmes 1.4.3 et 1.4.4, que $I_1^{<\omega}$ est la classe des tournois finis qui n'abritent aucun des tournois D_5, T_5, V_5, C_6 et B_6.

Nous donnons maintenant une description morphologique des tournois finis d'indice 1, c'est-à-dire, des tournois non transitifs de la classe $I_1^{<\omega}$. Nous posons alors $U_3 := C_3$ et nous introduisons la classe $\mathcal{U}$ des tournois finis T qui s'écrivent sous la forme : $T = \mathcal{O}_n(T^0, \cdots, T^{n-1})$, où $n \in \{1, 2, 3\}$, les tournois T^i sont non vides, et où il existe un indice $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que :

- $T^k = U_{2m+1}(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^{2m})$, où $m \geq 1$ et les $\mathcal{O}^i$ sont des tournois finis, non vides et transitifs.
- Si $j \in \mathbb{N}_{n-1} - \{k\}$, alors T^j est un tournoi fini et transitif.

Proposition 1.4.2. *À des isomorphismes près, les tournois finis d'indice 1, sont les tournois de la classe* $\mathcal{U}$.

Nous nous intéressons enfin à la classe $I_n^{\leq\omega}$, des tournois au plus dénombrables T, tels que $i(T) \leq n$. Nous construisons un tournoi (dénombrable) $W(n)$ de la classe $I_n^{\leq\omega}$ qui abrite tous les tournois de cette classe. Un tel tournoi est appelé un tournoi *universel* de la classe $I_n^{\leq\omega}$. Nous considérons, à cet effet, n nombres réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que $1, \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ soient *rationnellement indépendants*, c'est-à-dire tels que pour tous nombres rationnels $\beta, \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$, si $\beta = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\alpha_i$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\beta = \beta_i = 0$. On note $2^{\mathbb{N}_{n-1}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}_{n-1}$ dans $\{0, 1\}$. Pour $f \in 2^{\mathbb{N}_{n-1}}$, on pose $\alpha(f) := \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\alpha_i$, $\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q} + \alpha(f)$ et $\mathbb{Q}(n) := \bigcup_{f\in 2^{\mathbb{N}_{n-1}}} \mathbb{Q}_f$, où pour $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} + a := \{r + a : r \in \mathbb{Q}\}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, on pose $X_i := \bigcup_{\{f \in 2^{\mathbb{N}_{n-1}} : f(i)=1\}} \mathbb{Q}_f$. Le tournoi $W(n)$ est obtenu à partir du tournoi transitif usuel sur $\mathbb{Q}(n)$ en inversant successivement les n parties $X_0, \dots, X_{n-1}$. Plus précisément, $W(n) := (\underline{\mathbb{Q}(n)}, (X_i)_{0 \leq i \leq n-1})$.

Théorème 1.4.5. *Le tournoi $W(n)$ est d'indice n. De plus tout tournoi de la classe $I_n^{\leq \omega}$ s'abrite dans $W(n)$.*

1.5 Définitions

Nous utilisons les notations ensemblistes usuelles, toutefois nous notons $X - Y$ au lieu de $X \setminus Y$ l'ensemble des éléments de X n'appartenant pas à Y.

• **Graphe simple.** Un *graphe simple* est un couple $G := (S, A)$ dans lequel S est un ensemble fini et $A \subseteq \mathcal{P}_2(S)$, où $\mathcal{P}_2(S)$ est l'ensemble des paires d'éléments distincts de S. Les éléments de S et de A sont respectivement les sommets et les *arêtes* de G.

• **Sous-graphe.** Étant donné un graphe (simple ou orienté) $G := (S, A)$, à chaque partie X de S est associé le *sous-graphe* $G(X)$ (ou $G/_X$) de G *induit* par X défini comme suit. $G(X) := (X, A \cap (X \times X))$ lorsque G est un graphe orienté, $G(X) := (X, A \cap \mathcal{P}_2(S))$ lorsque G est un graphe simple. Pour $X \subset S$, le graphe $G(S - X)$ est noté $G - X$. Pour $x \in S$, $G - \{x\}$ est noté $G - x$.

• **Isomorphisme.** Étant donnés deux graphes (orientés) $G := (S, A)$ et $G' := (S', A')$, un *isomorphisme* de G sur G' est une bijection de S sur S' telle que pour tous $x, y \in S$, $(x, y) \in A$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in A'$. Lorsqu'un tel isomorphisme existe, on dit que G et G' sont *isomorphes* et on note $G \simeq G'$. De même, deux graphes simples G et G' sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de G sur G', c'est-à-dire une bijection g de $S(G)$ sur $S(G')$ telle que pour tous $x, y \in S(G)$, $\{x, y\} \in A(G)$ si et seulement si $\{g(x), g(y)\} \in A(G')$. Un graphe *autodual* est un graphe (orienté) isomorphe à son dual.

• **Abritement et omission.** Étant donnés deux graphes G et G' (tous deux simples ou tous deux orientés), on dit que G *abrite* G' ou que G' s'abrite dans G, lorsque G' est isomorphe à un sous-graphe induit de G, c'est-à-dire, s'il existe une partie X de $S(G)$ telle que $G' \simeq G(X)$. Lorsque G' ne s'abrite pas dans G, on dit que G *omet* G'.

• **Notations.** Soit $G := (S, A)$ un graphe orienté. Pour un sommet $a \in S$, $V_G^+(a)$ et $V_G^-(a)$ désignent respectivement les ensembles $\{b \in S : (a, b) \in A\}$ et $\{b \in S : (b, a) \in A\}$. Pour tous sommets distincts x, y de S, la notation $x \longleftrightarrow y$ signifie $(x, y) \in A$ et $(y, x) \in A$, la notation $x - -y$ signifie $(x, y) \notin A$ et $(y, x) \notin A$, $x \longrightarrow y$ signifie $(x, y) \in A$ et $(y, x) \notin A$. Pour $x \in S$ et $Y \subseteq S$, $x \longrightarrow Y$ (resp. $Y \longrightarrow x$) signifie

$x \longrightarrow y$ (resp. $y \longrightarrow x$) pour tout $y \in Y$. Pour $X, Y \subseteq S$, $X \longrightarrow Y$ signifie $x \longrightarrow Y$ pour tout $x \in X$. D'une manière analogue, on définit pour $x \in S$ et pour $X, Y \subseteq S$, $Y \longleftrightarrow x$, $x - -Y$, $X \longleftrightarrow Y$ et $X - -Y$. On introduit une relation d'équivalence $\equiv_G$ (ou $\equiv$) sur l'ensemble des couples de sommets distincts de G, définie comme suit : pour $x \neq y \in S$ et $u \neq v \in S$, $(x, y) \equiv_G (u, v)$ (ou $(x, y) \equiv (u, v)$) si $x \longrightarrow y$ et $u \longrightarrow v$ ou bien $y \longrightarrow x$ et $v \longrightarrow u$ ou bien $x \longleftrightarrow y$ et $u \longleftrightarrow v$ ou bien $x - -y$ et $u - -v$. Dans le cas contraire on note $(x, y) \not\equiv_G (u, v)$ (ou $(x, y) \not\equiv (u, v)$). Pour $X, Y \subseteq S$, avec $X \cap Y = \emptyset$, $X \sim Y$ signifie que pour tous x, $x' \in X$ et pour tous y, $y' \in Y$, $(x, y) \equiv (x', y')$. Pour $x \in S - Y$, on note $x \sim Y$ au lieu de $\{x\} \sim Y$.

• **Indécomposabilité.** Étant donné un graphe $G := (S, A)$, une partie I de S est un *intervalle* [16, 20, 30] (ou un *clan* [13]) de G lorsque pour tout $x \in S - I$, $x \sim I$. Par exemple, $\emptyset$, $\{x\}$ où $x \in S$, et S sont des intervalles de G appelés intervalles *triviaux*. Un graphe fini est *indécomposable* [20, 30] (ou *primitif* [13]) si tous ses intervalles sont triviaux et il est *décomposable* dans le cas contraire.

• **Graphes $(-k)$-critiques.** Un sommet x d'un graphe indécomposable G d'ordre ≥ 4 est dit *critique* si le graphe $G - x$ est décomposable. On dit que le graphe indécomposable G est critique lorsque tous ses sommets sont critiques. On généralise cette définition en disant que le graphe G est $(-k)$-*critique* lorsqu'il admet exactement

k sommets non critiques. Un graphe (-1)-critique en a est un graphe (-1)-critique dans lequel a est l'unique sommet non critique.

• **Connexité.** Étant donné un graphe simple $G := (S, A)$, une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est définie sur S comme suit. Pour tous $x \neq y \in S$, $x \mathcal{R} y$ s'il existe une suite $x_0 := x, \cdots, x_n := y$ de sommets de G tels que pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\{x_i, x_{i+1}\} \in A$. les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont appelées *composantes connexes* de G. Le graphe simple G est *connexe* lorsqu'il admet une unique composante connexe.

• **Degré.** Pour tout sommet x d'un graphe simple $G := (S, A)$, on pose $V_G(x) := \{y \in S : \{x, y\} \in A\}$. Le *degré* de x dans G, noté $d_G(x)$, est le cardinal de $V_G(x)$. Par exemple, un sommet *isolé* de G est un sommet de degré 0.

• **Graphe complémentaire.** Étant donné un graphe G, le graphe *complémentaire* de G, noté $\overline{G}$, est défini sur $S(G)$ comme suit : pour tous $x \neq y \in S(G)$, $(x, y) \in A(\overline{G})$ si $(x, y) \notin A(G)$.

Chapitre 2

Indecomposable tournaments and their indecomposable subtournaments on 5 and 7 vertices

Abstract. Given a tournament $T := (V, A)$, a subset X of V is an interval of T provided that for every $a, b \in X$ and $x \in V - X$, $(a, x) \in A$ if and only if $(b, x) \in A$. For example, $\emptyset$, $\{x\}(x \in V)$ and V are intervals of T, called trivial intervals. A tournament, all the intervals of which are trivial, is indecomposable ; otherwise, it is decomposable. A critical tournament is an indecomposable tournament T of cardinality ≥ 5 such that for any vertex x of T, the tournament $T - x$ is decomposable. The critical tournaments are of odd cardinality and for all $n \geq 2$ there are exactly three critical tournaments on $2n+1$ vertices denoted by T_{2n+1}, U_{2n+1} and V_{2n+1}. The tournaments T_5, U_5 and V_5 are the unique indecomposable tournaments on 5 vertices.

We say that a tournament T embeds into a tournament T' when T is isomorphic to a subtournament of T'. A diamond is a tournament on 4 vertices admitting only one interval of cardinality 3. We prove the following theorem : if a diamond and T_5 embed into an indecomposable tournament T, then V_5 and U_5 embed into T. To conclude, we prove the following : given an indecomposable tournament T, with $|V(T)| \geq 7$, T is critical if and only if only one of the tournaments T_7, U_7 or V_7 embeds into T.

Key words : Tournament ; Indecomposable ; Critical ; Embedding.

2.1 Basic definitions

In this chapter, a *tournament* $T := (V(T), A(T))$ or (V, A) consists of a finite *vertex* set V with an *arc* set A of ordered pairs of distinct vertices satisfying : for $x, y \in V$, with $x \neq y$, $(x, y) \in A$ if and only if $(y, x) \notin A$. The *cardinality* of T is that of $V(T)$ denoted by $|V(T)|$. For two distinct vertices x and y of a tournament T, $x \longrightarrow y$ means that $(x, y) \in A(T)$. For $x \in V(T)$ and $Y \subset V(T)$, $x \longrightarrow Y$ (rep. $Y \longrightarrow x$) signifies that for every $y \in Y$, $x \longrightarrow y$ (resp. $y \longrightarrow x$). Given a vertex x of a tournament $T := (V, A)$, $V_T^+(x)$ denotes the set $\{y \in V : x \longrightarrow y\}$. The *score* of x (in T), denoted by $s_T(x)$, is the cardinality of $V_T^+(x)$. A tournament is *regular* if all its vertices share the same score. A *transitive* tournament or *total order* is a tournament T such that for x, y, $z \in V(T)$, if $x \longrightarrow y$ and $y \longrightarrow z$, then $x \longrightarrow z$. For two distinct vertices x and y of a total order T, $x < y$ means that $x \longrightarrow y$. We write $T = a_0 < \cdots < a_n$ to mean that T is the total order defined on $V(T) := \{a_0, \ldots, a_n\}$ by $A(T) := \{(a_i, a_j) : i < j\}$.

The notions of isomorphism, of subtournament and of embedding are defined in the following manner. First, let $T := (V, A)$ and $T' := (V', A')$ be two tournaments. A one-to-one correspondence f from V onto V' is an *isomorphism* from T onto T' provided that for $x, y \in V$, $(x, y) \in A$ if and only if $(f(x), f(y)) \in A'$. The tournaments

T and T' are then said to be *isomorphic*, which is denoted by $T \simeq T'$. Moreover, an isomorphism from a tournament T onto itself is called an *automorphism* of T. The automorphisms of T form a subgroup of the permutation group of $V(T)$, called the *automorphism group* of T. Second, given a tournament $T := (V, A)$, with each subset X of V is associated the *subtournament* $T(X) := (X, A \cap (X \times X))$ of T *induced* by X. For $x \in V$, the subtournament $T(V - \{x\})$ is denoted by $T - x$. For tournaments T and T', if T' is isomorphic to a subtournament of T, then we say that T' *embeds* into T. Otherwise, we say that T *omits* T'. The *dual* of a tournament $T := (V, A)$ is the tournament obtained from T by reversing all its arcs. This tournament is denoted by $T^\star := (V, A^\star)$, where $A^\star := \{(x, y) : \ (y, x) \in A\}$. A tournament T is then said to be *self-dual* if T and $T^\star$ are isomorphic.

The indecomposability plays an important role in this chapter. Given a tournament $T := (V, A)$, a subset I of V is an *interval* ([16], [20], [30]) (or a *clan* [13] or an *homogeneous subset* [17]) of T provided that for every $x \in V - I$, $x \rightarrow I$ or $I \rightarrow x$. This definition generalizes the notion of interval of a total order. Given a tournament $T := (V, A)$, $\emptyset$, V and $\{x\}$, where $x \in V$, are clearly intervals of T, called *trivial* intervals. A tournament is then said to be *indecomposable* ([20], [30]) (or *primitive* [13]) if all of its intervals are trivial, and is said to be *decomposable* otherwise. For instance, the 3-cycle $C_3 := (\{0,1,2\},\{(0,1),(1,2),(2,0)\})$ is indecomposable whereas a total order of cardinality ≥ 3 is decomposable. Let us mention the following relationship between indecomposability and duality. The tournaments T and $T^\star$ have the same intervals and, thus, T is indecomposable if and only if $T^\star$ is indecomposable.

2.2 The critical tournaments

An indecomposable tournament $T := (V, A)$ is said to be *critical* if $\mid V \mid > 1$ and for all $x \in V$, $T - x$ is decomposable. In order to present our main results and to present the characterization of the critical tournaments due to J.H. Schmerl and W.T. Trotter [30], we consider the tournaments T_{2n+1}, U_{2n+1} and V_{2n+1} introduced in the first chapter.

Theorem 2.2.1 ([30]). *Up to isomorphism, the critical tournaments of cardinality ≥ 5 are the tournaments T_{2n+1}, U_{2n+1} and V_{2n+1}, where $n \geq 2$.*

Notice that the critical tournaments are self-dual.

2.3 The tournaments T_5, U_5 and V_5 in an indecomposable tournament

We study the indecomposable tournaments according to their indecomposable subtournaments on 5 vertices. A recent result on our topic is a characterization of the indecomposable tournaments omitting V_5 obtained by B.J. Latka [24]. In order to recall this characterization, we introduce the *Paley* tournament P_7 defined on $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ by $A(P_7) := \{(i, j) : j - i \in \{1, 2, 4\}\}$. Notice that the tournaments obtained from P_7 by deleting one vertex are isomorphic and denote $P_7 - 6$ by B_6.

Theorem 2.3.1 ([24]). *Given a tournament T of cardinality ≥ 5, T is indecomposable and omits V_5 if and only if T is isomorphic to an element of $\{B_6, P_7\} \cup \{T_{2n+1} : n \geq 2\} \cup \{U_{2n+1} : n \geq 2\}$.*

A *diamond* is a tournament on 4 vertices admitting only one interval of cardinality 3. Up to isomorphism, there are exactly two diamonds D_4 and $D_4^\star$, where D_4 is the tournament defined on $\{0, 1, 2, 3\}$ by $D_4(\{0, 1, 2\}) := C_3$ and $3 \longrightarrow \{0, 1, 2\}$.

The following theorem is the main result. This theorem is presented in [3] without a detailed proof.

Theorem 2.3.2. *Given an indecomposable tournament T, if a diamond and T_5 embed into T, then U_5 and V_5 embed into T.*

C. Gnanvo and P. Ille [18] and G. Lopez and C. Rauzy [25] characterized the tournaments omitting diamonds. In the indecomposable case they obtained the following characterization.

Proposition 2.3.1 ([18, 25])**.** *Given an indecomposable tournament T of cardinality ≥ 5, T omits the diamonds D_4 and $D_4^\star$ if and only if T is isomorphic to T_{2n+1} for some $n \geq 2$.*

2.4 Proof of Theorem 2.3.2

Before proving Theorem 2.3.2, we introduce some notations and definitions.

Definition 2.4.1. *Given a tournament $T := (V, A)$, with each subset X of V, such that $\mid X \mid \geq 3$ and $T(X)$ is indecomposable, are associated the following subsets of $V - X$.*

- *$Ext(X) := \{x \in V - X :\ T(X \cup \{x\})$ is indecomposable$\}$.*
- *$[X] := \{x \in V - X :\ x \to X$ or $X \to x\}$.*
- *For every $u \in X$, $X(u) := \{x \in V - X :\ \{u, x\}$ is an interval of $T(X \cup \{x\})\}$.*

Lemma 2.4.1 ([13])**.** *Let $T := (V, A)$ be a tournament and let X be a subset of V such that $\mid X \mid \geq 3$ and $T(X)$ is indecomposable.*

1. *The family $\{X(u) : u \in X\} \cup \{Ext(X), [X]\}$ constitutes a partition of $V - X$.*
2. *Given $u \in X$, for all $x \in X(u)$ and for all $y \in V - (X \cup X(u))$, if $T(X \cup \{x, y\})$ is decomposable, then $\{u, x\}$ is an interval of $T(X \cup \{x, y\})$.*
3. *For every $x \in [X]$ and for every $y \in V - (X \cup [X])$, if $T(X \cup \{x, y\})$ is decomposable, then $X \cup \{y\}$ is an interval of $T(X \cup \{x, y\})$.*

4. *Given $x, y \in Ext(X)$, with $x \neq y$, if $T(X \cup \{x, y\})$ is decomposable, then $\{x, y\}$ is an interval of $T(X \cup \{x, y\})$.*

The below result follows from Lemma 2.4.1.

Proposition 2.4.1 ([13]). *Let $T := (V, A)$ be an indecomposable tournament. If X is a subset of V, such that $\mid X \mid \geq 3$, $\mid V - X \mid \geq 2$ and $T(X)$ is indecomposable, then there are distinct elements x and y of $V - X$ such that $T(X \cup \{x, y\})$ is indecomposable.*

Corollary 2.4.1. *Let $T := (V, A)$ be an indecomposable tournament such that $\mid V \mid$ is even and $\mid V \mid \geq 6$. For each $x \in V$, there is $y \in V - \{x\}$ such that $T - y$ is indecomposable.*

PROOF. As T is indecomposable, there is $X \subset V$ such that $x \in X$ and $T(X) \simeq C_3$. Otherwise, $V_T^+(x)$ or $V - (\{x\} \cup V_T^+(x))$ would be non trivial intervals of T. Since $\mid V \mid$ is even, by applying several times Proposition 2.4.1 from the indecomposable subtournament $T(X)$, we get a vertex $y \in V - X$ such that $T - y$ is indecomposable.

$\square$

The 3-cycle C_3 is indecomposable and embeds into any indecomposable tournament of cardinality ≥ 3 as observed in the preceding proof. It follows, by Proposition 2.4.1, that any indecomposable tournament T of cardinality ≥ 5, admits an indecomposable subtournament on 5 vertices. The indecomposable tournaments on 5 vertices are critical because the four tournaments on 4 vertices are decomposable. So let us mention the following facts.

Remark 2.4.1.

- *The indecomposable tournaments on 5 vertices are, up to isomorphism, the three critical tournaments* T_5*,* U_5 *and* V_5*.*
- *There is no indecomposable tournament of cardinality* ≥ 5 *omitting each of the tournaments* T_5*,* U_5 *and* V_5*.*

The tournaments T_{2n+1} play an important role in the proof of Theorem 2.3.2. We notice that, for all $n \geq 2$, the tournament T_{2n+1} is isomorphic to the tournament $\widetilde{T}_{2n+1}$ defined on $\mathbb{Z}/(2n+1)\mathbb{Z}$ by $A(\widetilde{T}_{2n+1}) := \{(i,j) : j-i \in \{1, \cdots, n\}\}$ (See Figure 2.1). An isomorphism f from T_{2n+1} onto $\widetilde{T}_{2n+1}$ is given by $f(i) := 2(n-i)$ if $i \in \mathbb{N}_n$; $f(i) := 2(2n-i)+1$ if $i \in \{n+1, \ldots, 2n\}$. The tournaments $\widetilde{T}_{2n+1}$ were described by Kendall and Babington Smith [23] and given the name *highly-regular* tournaments by Moon [27]. We recall some of their properties.

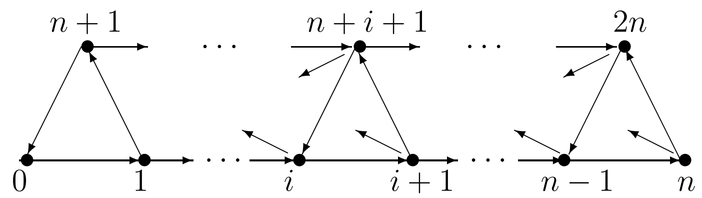

Figure 2.1 : $\widetilde{T}_{2n+1}$

Remark 2.4.2.

- *The tournaments* $\widetilde{T}_{2n+1}$ *are regular : for all* $i \in \mathbb{N}_{2n}$*,* $s_{\widetilde{T}_{2n+1}}(i) = n$ *;*
- *For* $0 \leq i \leq 2n$*, the unique non trivial interval of* $\widetilde{T}_{2n+1} - i$ *is {i+n, i+n+1} ;*
- *The automorphism group of* $\widetilde{T}_{2n+1}$ *is generated by the permutation* $\sigma : i \mapsto i+1$ *;*
- *The permutation* $\pi : i \mapsto -i$*, is an isomorphism from* $\widetilde{T}_{2n+1}$ *onto its dual.*

Now we are ready to prove Theorem 2.3.2.

PROOF OF THEOREM 3. Let $T := (V, A)$ be an indecomposable tournament into which a diamond and T_5 embed. Consider a minimal subset X of V such that $T(X)$ is indecomposable and a diamond and T_5 embed into $T(X)$. Now, let Y be a maximal subset of X such that $T(Y) \simeq T_{2n+1}$ for some $n \geq 2$. We establish that $\mid X \mid = 6$ by using the following observation. Consider a subset Z of X such that $T(Z) \simeq T_{2n+1}$ and assume that $Ext(Z) \cap X \neq \emptyset$. Let $x \in Ext(Z) \cap X$. We have $T(Z \cup \{x\})$ is indecomposable. Furthermore, as $\mid Z \cup \{x\} \mid$ is even, a diamond embeds into $T(Z \cup \{x\})$ by Proposition 2.3.1. Since T_5 embeds into $T(Z \cup \{x\})$ as well, it follows from the minimality of X that $X = Z \cup \{x\}$. As an immediate consequence, we have : if Z is a subset of X such that $T(Z) \simeq T_{2n+1}$ and $\mid X - Z \mid \geq 2$, then $Ext(Z) \cap X = \emptyset$. By Lemma 2.4.1, for every $x \in X - Z$, either $x \in [Z]$ or there is $u \in Z$ such that $x \in Z(u)$.

For a contradiction, suppose that $Ext(Y) \cap X = \emptyset$. By Proposition 2.4.1, there are $x \neq y \in X - Y$ such that $T(Y \cup \{x, y\})$ is indecomposable. Clearly, if $\{x, y\} \subseteq [Y]$, then Y would be a non trivial interval of $T(Y \cup \{x, y\})$. For instance, assume that there is $v \in Y$ such that $y \in Y(v)$. By Lemma 2.4.1, either there is $u \in Y$ such that $x \in Y(u)$ or $x \in [Y]$. In each of both instances, we obtain a contradiction.

First, suppose that there is $u \in Y$ such that $x \in Y(u)$. We have $u \neq v$, otherwise $\{u, x, y\}$ would be a non trivial interval of $T(Y \cup \{x, y\})$. By Remark 2.4.2, the automorphism group of $\widetilde{T}_{2n+1}$ is generated by $\sigma : i \mapsto i+1$. Therefore, by interchanging x and y, we can denote the elements of Y by $0, \ldots, 2n$ in such a way that $T(Y) = \widetilde{T}_{2n+1}$, $u = 0$ and $1 \leq v \leq n$. Since $T(Y \cup \{x, y\})$ is indecomposable and $0 \longrightarrow v$, we get $y \longrightarrow x$ by Lemma 2.4.1. Consider $Z := (Y - \{0\}) \cup \{x\}$. We have $T(Z) \simeq T_{2n+1}$ and, by the preceding observation, either $y \in [Z]$ or there is $w \in Z$ such that $y \in Z(w)$. The first instance is not possible because $\{v-2, v-1\} \cap Z \neq \emptyset$ and $\{v-2, v-1\} \longrightarrow y \longrightarrow x$. So assume that there is $w \in Z$ such that $y \in Z(w)$. As $y \longrightarrow x \longrightarrow v$, $w \neq v$. Moreover, if $w = x$, then $\{x, y\}$ is an interval of $T(Z \cup \{y\})$. Since $\{v, y\}$ is an interval of $T((Z \cup \{y\}) - \{x\})$, we would obtain that $\{x, y, v\}$ is an interval of $T(Z \cup \{y\})$ so that $\{x, v\}$ would be an interval of $T(Z)$. Therefore, $w \notin \{v, x\}$ and hence $\{v, w\}$ is an interval of $T(Z) - x$. As $x \in Y(0)$, it follows from

Remark 2.4.2 that $\{v, w\} = \{n, n+1\}$ so that $v = n$ and $n \longrightarrow y$. By considering the automorphism σ^{n+1} of $T(Y)$ defined by $\sigma^{n+1}(i) = i + n + 1$, we obtain that $y \in Y(0)$ and $x \in Y(n+1)$. By considering $T^\star$ instead of T, we get $y \in Y(0)$ and $x \in Y(n)$ because the permutation $\pi : i \mapsto -i$ is an isomorphism from $T(Y)$ onto $T(Y)^\star$ by Remark 2.4.2. Lastly, by interchanging x and y in the foregoing, we obtain $n \longrightarrow x$ in $T^\star$ which means that initially $x \longrightarrow 0$ in T. It follows that the function $Y \cup \{x, y\} \longrightarrow \mathbb{N}_{2n+2}$, defined by $x \mapsto 2n+2$, $y \mapsto n+1$, $i \mapsto i$ for $0 \leq i \leq n$ and $i \mapsto i+1$ for $n+1 \leq i \leq 2n$, realizes an isomorphism from $T(Y \cup \{x, y\})$ onto $\widetilde{T}_{2n+3}$. Consequently, $T(Y \cup \{x, y\}) \simeq T_{2n+3}$, with $Y \cup \{x, y\} \subseteq X$, which contradicts the maximality of Y. Second, suppose that $x \in [Y]$. By interchanging T and $T^\star$, assume that $y \longrightarrow x \longrightarrow Y$. Consider $Z := (Y - \{v\}) \cup \{y\}$. We have $T(Z) \simeq T_{2n+1}$ and, by the previous observation, either $x \in [Z]$ or there is $w \in Z$ such that $x \in Z(w)$. The first instance is not possible because $y \longrightarrow x \longrightarrow Z - \{y\}$. Since $y \longrightarrow x \longrightarrow Z - \{y\}$ and hence $s_{T(Z \cup \{x\})}(x) = 2n$, the second is not possible either. Indeed, given $w \in Z$, if $x \in Z(w)$, then $s_{T(Z \cup \{x\})}(x) \in \{n, n+1\}$ because $s_{T(Z)}(w) = n$.

It follows that $Ext(Y) \cap X \neq \emptyset$. Set $T(Y) := \widetilde{T}_{2n+1}$. By the preceding observation, $X = Y \cup \{x\}$, where $x \in Ext(Y) \cap X$. As $\mid X \mid$ is even, it follows from Corollary 2.4.1 that there is $j \in X - \{x\}$ such that $T(X) - j$ is indecomposable. By considering the automorphism σ^{2n+1-j} of $T(Y)$, we can assume that $j = 0$. For a contradiction, suppose that $T(X) - 0 \simeq T_{2n+1}$. We would have $s_{(T(X)-0)}(x) = n$. Since $s_{(T(Y)-0)}(i) = n$ for $1 \leq i \leq n$ and $s_{(T(Y)-0)}(i) = n-1$ for $n+1 \leq i \leq 2n$, we would obtain that $V^+_{(T(X)-0)}(x) = \{1, \ldots, n\}$ so that $\{0, x\}$ would be a non trivial interval of $T(X)$. Consequently, $T(X) - 0$ is not isomorphic to T_{2n+1}. By Proposition 2.3.1, a diamond embeds into $T(X) - 0$. It follows from the minimality of $T(X)$ that $T(X) - 0$ and hence $T(Y) - 0$ omit T_5. As T_5 embeds into $\widetilde{T}_{2m+1} - 0$ for $m \geq 3$, we get $n = 2$.

It remains to verify that U_5 and V_5 embed into $T(X)$. Since $x \notin [Y]$, $s_{T(X)}(x) \in \{1, 2, 3, 4\}$. By interchanging T and $T^\star$, assume that $s_{T(X)}(x) = 1$ or 2. First, assume that there is $i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ such that $V^+_{T(X)}(x) = \{i\}$. By considering the automorphism $j \mapsto j - i$ of $\widetilde{T}_5$, assume that $i = 0$. The function $\mathbb{N}_4 \longrightarrow X - \{3\}$, defined by $0 \mapsto 2$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto x$ and $4 \mapsto 0$ is an isomorphism from U_5 onto $T(X) - 3$. Furthermore, the function $\mathbb{N}_4 \longrightarrow X - \{2\}$, defined by $0 \mapsto 3$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto x$, $3 \mapsto 0$ and $4 \mapsto 1$, is an isomorphism from V_5 onto $T(X) - 2$. Finally, assume that there is $i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ such that $V^+_{T(X)}(x) = \{i, i+1\}$ or $\{i, i+2\}$. If $V^+_{T(X)}(x) = \{i, i+1\}$, then $\{i-1, x\}$ would be an interval of $T(X)$. So, by considering the automorphism $k \mapsto k - i$ of $\widetilde{T}_5$, assume that $V^+_{T(X)}(x) = \{0, 2\}$. The function $\mathbb{N}_4 \longrightarrow X - \{0\}$, defined by $0 \mapsto 4$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto x$ and $4 \mapsto 2$, is an isomorphism from U_5 onto $T(X) - 0$.

Furthermore, the function $\mathbb{N}_4 \longrightarrow X - \{2\}$, defined by $0 \mapsto 3$, $1 \mapsto 4$, $2 \mapsto x$, $3 \mapsto 0$ and $4 \mapsto 1$, is an isomorphism from V_5 onto $T(X) - 2$.

□

2.5 A new characterization of the critical tournaments

In this section we discuss some other questions concerning the indecomposable subtournaments on 5 and 7 vertices of an indecomposable tournament. In particular, we obtain a new characterization of the critical tournaments. In that order, we recall the following two results concerning the critical tournaments.

Lemma 2.5.1 ([30]). *The indecomposable subtournaments of T_{2n+1} on at least 5 vertices, where $n \geq 2$, are isomorphic to T_{2m+1}, where $2 \leq m \leq n$. The same holds for the indecomposable subtournamants of U_{2n+1} and of V_{2n+1}.*

Lemma 2.5.2 ([9]). *Given an indecomposable tournament T of cardinality ≥ 5, T is critical if and only if T omits any indecomposable tournament on six vertices.*

Let T be an indecomposable tournament of cardinality ≥ 5. We denote by $I_5(T)$ the set of the elements of $\{T_5, U_5, V_5\}$ embedding in T. By Remark 2.4.1, $I_5(T) \neq \emptyset$. By Theorem 2.3.2, $I_5(T) \neq \{T_5, U_5\}$ and $I_5(T) \neq \{T_5, V_5\}$. We characterize the indecomposable tournaments T such that $I_5(T) = \{T_5\}$ (resp. $I_5(T) = \{U_5\}$). The following remark completes this discussion.

Remark 2.5.1. *For $J := \{V_5\}$, $\{U_5, V_5\}$ or $\{T_5, U_5, V_5\}$ and for $n \geq 6$, there exists an indecomposable tournament T of cardinality n such that $I_5(T) = J$.*
For $n \geq 5$, the tournaments E_{n+1}, F_{n+1} and G_{n+1} defined below on $\mathbb{N}_n$ are indecomposable and satisfy $I_5(E_{n+1}) = \{T_5, U_5, V_5\}$, $I_5(F_{n+1}) = \{V_5\}$ and $I_5(G_{n+1}) = \{U_5, V_5\}$.

- $E_{n+1}(\mathbb{N}_4) := T_5$ *and, for all* $5 \leq k \leq n$, $V^+_{E_{n+1}(\mathbb{N}_k)}(k) := \{k-1\}$;
- $A(F_{n+1}) := \{(i, j) : i + 1 < j \text{ or } i = j + 1\}$;
- $G_n(\mathbb{N}_{n-1}) := F_n$ *and* $V^+_{G_{n+1}}(n) := \{0\}$.

The following is an easy consequence of Theorem 2.3.1 and of Lemma 2.5.1.

Corollary 2.5.1. *The next two assertions are satisfied by any indecomposable tournament T of cardinality ≥ 5.*

1. *T is isomorphic to T_{2n+1} for some $n \geq 2$ if and only if the indecomposable subtournaments of T on 5 vertices are isomorphic to T_5.*

2. *T is isomorphic to B_6, P_7 or to U_{2n+1} for some $n \geq 2$ if and only if the indecomposable subtournaments of T on 5 vertices are isomorphic to U_5.*

For all $n \geq 6$, the tournament F_n defined in Remark 2.5.1 is an indecomposable non critical tournament all the indecomposable subtournaments of which are isomorphic to V_5. This leads us to the following characterization of the tournaments V_{2n+1} and to the problem below.

Proposition 2.5.1. *Given an indecomposable tournament T of cardinality ≥ 7, T is isomorphic to V_{2n+1} for some $n \geq 3$ if and only if the indecomposable subtournaments on 7 vertices of T are isomorphic to V_7.*

PROOF. By Lemma 2.5.1, if $T \simeq V_{2n+1}$, where $n \geq 3$, then the indecomposable subtournaments of T on 7 vertices are isomorphic to V_7. Conversely, assume that the indecomposable subtournaments of T on 7 vertices are isomorphic to V_7. By Lemma 2.5.1, it suffices to show that T is critical. Clearly, if $| V(T) |= 7$, then $T \simeq V_7$. So assume that $| V(T) |\geq 8$. For a contradiction, suppose that T is not critical. It follows from Lemma 2.5.2 that there exists $X \subset V(T)$ such that $| X |= 6$ and $T(X)$ is indecomposable. By Proposition 2.4.1, there is $Y \subseteq V(T)$ such that $X \subset Y$, $| Y |= 8$ and $T(Y)$ is indecomposable. As $| Y |$ is even, $T(Y)$ is not critical. Consider $x \in Y$ such that $T(Y) - x$ is indecomposable. We have $T(Y) - x \simeq V_7$ and hence we can denote the elements of Y by $0, \dots, 7$ in such a way that $x = 7$ and $T(Y) - 7 = V_7$. By Corollary 2.4.1, there is $y \in \mathbb{N}_6$ such that $T(Y) - y$ is indecomposable and thus $T(Y) - y \simeq V_7$. To obtain a contradiction, we verify that $\{y, 7\}$ would be a non trivial interval of $T(Y)$. By interchanging T and $T^\star$, we can assume that $y \in \{0, 1, 2\} \cup \{6\}$ because the permutation of $\mathbb{N}_6$, which fixes 6 and which exchanges i and $5 - i$ for $0 \leq i \leq 5$, is an isomorphism from V_7 onto its dual. First, assume that $y = 6$. We have

$T(Y) - \{6, 7\} = 0 < \cdots < 5$. Since $\{1, \ldots, 5\} \cup \{7\}$ is not an interval of $T(Y) - 6$, $7 \longrightarrow 0$. As $\{i, i+1\}$ is not an interval of $T(Y) - 6$ for $0 \leq i \leq 4$, we obtain successively that $1 \longrightarrow 7$, $7 \longrightarrow 2$, $3 \longrightarrow 7$, $7 \longrightarrow 4$ and $5 \longrightarrow 7$. Second, assume that $y \in \{0, 1, 2\}$. For $z \in \mathbb{N}_7 - \{y, 6\}$, C_3 embeds into $T(Y) - \{y, z\}$ because $T(\{2i, 2i + 1, 6\}) \simeq C_3$ for $i \in \{0, 1, 2\}$. It follows that the isomorphism from V_7 onto $T(Y) - y$ fixes 6. Consequently, $T(Y) - \{y, 6\}$ is transitive. We have only to check that $T(Y) - \{y, 6\}$ is obtained from the usual total order on $\mathbb{N}_5$ by replacing y by 7. If $y = 0$, then $7 \longrightarrow 1$ because $1 \longrightarrow \{2, \ldots, 6\}$. Thus $T(Y) - \{y, 6\} = 7 < 1 < \cdots < 5$. If $y = 1$ or 2, then $\{y - 1, y + 1\}$ is an interval of $T(Y) - \{y, 7\}$. Therefore, $\{y - 1, y + 1\}$ is not an interval of $T(\{y - 1, y + 1, 7\})$ and hence $T(Y) - \{y, 6\} = \cdots < y - 1 < 7 < y + 1 < \cdots < 5$.

$\square$

From Corollary 2.5.1 and Proposition 2.5.1, we obtain the following recognition of the critical tournaments from their indecomposable subtournaments on 7 vertices.

Corollary 2.5.2. *Given an indecomposable tournament T, with $|V(T)| \geq 7$, T is critical if and only if there is $W \in \{T_7, U_7, V_7\}$ such that the indecomposable tournaments on 7 vertices of T are isomorphic to W.*

Problem 2.5.1. *Characterize the indecomposable tournaments all of whose indecomposable subtournaments on 5 vertices are isomorphic to V_5.*

Chapitre 3

Morphologie des tournois (-1)-critiques

Résumé.

En 1993, J.H. Schmerl et W.T. Trotter ont caractérisé les tournois dont tous les sommets sont critiques, appelés tournois critiques. Ces tournois ont un cardinal impair ≥ 5. Pour chaque entier impair $m \geq 5$, il existe trois tournois critiques de cardinal m. Dans ce chapitre, nous caractérisons les tournois qui admettent un unique sommet non critique, que nous appelons tournois (-1)-critiques. Ces tournois ont un cardinal impair ≥ 7. Pour chaque entier impair $m \geq 7$, il existe exactement $3m - 15$ tournois (-1)-critiques de cardinal m.

Mots clés : Chemin, Critique, Graphe d'indécomposabilité, Intervalle, Tournoi indécomposable, Tournoi (-1)-critique.

3.1 Introduction

Les tournois considérés dans ce chapitre sont des tournois finis et non vides. Afin de rappeler la caractérisation des tournois critiques, obtenue par J.H. Schmerl et W.T. Trotter [30], nous considérons les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1} introduits au chapitre 1.

Proposition 3.1.1 ([30]). *À des isomorphismes près, les tournois critiques sont les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1}, où $n \geq 2$.*

Dans ce chapitre, nous caractérisons les tournois (-1)-critiques, répondant ainsi, dans le cas des tournois, à une question posée par Y. Boudabbous et P. Ille [10]. Contrairement aux tournois T_{2n+1}, les tournois U_{2n+1} et V_{2n+1} apparaissent dans la morphologie de ces tournois que nous construisons, comme dans [5] et [4], à partir de leur unique sommet non critique.

Nous présentons alors, pour tout entier $n \geq 3$ et pour tout entier $k \in \{1, \cdots, n-2\}$, les tournois E_{2n+1}^{2k+1}, F_{2n+1}^{2k+1}, G_{2n+1}^{2k+1} et H_{2n+1}^{2k+1} définis sur $\mathbb{N}_{2n}$ et introduits au chapitre 1, comme suit.

1. $E_{2n+1}^{2k+1}(V^-_{E_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) := \mathcal{O}_{2k+1}$, $E_{2n+1}^{2k+1}(V^+_{E_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) := 2k+2 < \cdots < 2n$ et pour tout $(x, y) \in V^+_{E_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1) \times V^-_{E_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si x et y sont pairs ;

2. $F_{2n+1}^{2k+1}(V^-_{F_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) := U_{2k+1}$, $F_{2n+1}^{2k+1}(V^+_{F_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) := 2k+2 < \cdots < 2n$ et pour tout $(x,y) \in V^+_{F_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1) \times V^-_{F_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si x et y sont pairs ;

3. $G_{2n+1}^{2k+1}(V^-_{G_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) := U_{2k+1}$, $G_{2n+1}^{2k+1}(V^+_{G_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) \simeq V_{2n-2k-1}$ avec $2k+2 < \cdots < 2n-1$ et pour tout $(x,y) \in V^+_{G_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1) \times V^-_{G_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si $x = 2n$ et y est pair ;

4. $H_{2n+1}^{2k+1}(V^-_{H_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) := V_{2k+1}$, $H_{2n+1}^{2k+1}(V^+_{H_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)) \simeq V_{2n-2k-1}$ avec $2k+2 < \cdots < 2n-1$ et pour tout $(x,y) \in V^+_{H_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1) \times V^-_{H_{2n+1}^{2k+1}}(2k+1)$, $x \longrightarrow y$ si et seulement si $x = 2n$ et $y = 2k$.

Observons que dans ces tournois, chacun des sous-tournois $T(V^-_T(2k+1))$ et $T(V^+_T(2k+1))$ est ou bien transitif, ou bien un tournoi critique non isomorphe à un tournoi de la classe $\{T_{2p+1}\}_{p\geq 2}$. Les cardinaux respectifs de ces sous-tournois sont $2k+1$ et $2n-2k-1$.

Pour tout entier $n \geq 3$, on désigne par $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{F}_{2n+1}$, $\mathcal{F}^\star_{2n+1}$, $\mathcal{G}_{2n+1}$, $\mathcal{G}^\star_{2n+1}$, $\mathcal{H}_{2n+1}$), la classe des $(n-2)$ tournois $\{E_{2n+1}^{2k+1}\}_{1\leq k\leq n-2}$ (resp. $\{F_{2n+1}^{2k+1}\}_{1\leq k\leq n-2}$, $\{(F_{2n+1}^{2k+1})^\star\}_{1\leq k\leq n-2}$, $\{G_{2n+1}^{2k+1}\}_{1\leq k\leq n-2}$, $\{(G_{2n+1}^{2k+1})^\star\}_{1\leq k\leq n-2}$, $\{H_{2n+1}^{2k+1}\}_{1\leq k\leq n-2}$).

Remarquons alors le fait suivant.

Remarque 3.1.1. *Étant donné un entier $n \geq 3$, si T est un tournoi de la classe*

$\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{H}_{2n+1}$), alors $T^\star$ est aussi un tournoi de la classe $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{H}_{2n+1}$)).

Preuve. Il suffit de remarquer que pour $k \in \{1, \cdots, n-2\}$, la permutation σ de $\mathbb{N}_{2n}$ définie par : pour tout $q \in \mathbb{N}_{2n}$, $\sigma(q) = 2n - q$ (resp. $\sigma(q) = 2n - q - 1$ si $q \in \mathbb{N}_{2n} - \{2n, 2k, 2k+1\}$, $\sigma(2n) = 2(n-k-1)$, $\sigma(2k) = 2n$ et $\sigma(2k+1) = 2(n-k-1)+1$), est un isomorphisme de $(E_{2n+1}^{2k+1})^\star$ (resp. $(H_{2n+1}^{2k+1})^\star$) sur $E_{2n+1}^{2(n-k-1)+1}$ (resp. $H_{2n+1}^{2(n-k-1)+1}$).

$\square$

La caractérisation suivante des tournois (-1)-critiques, est le principal résultat de ce chapitre.

Théorème 3.1.1. *À des isomorphismes près, les tournois (-1)-critiques sont les tournois E_{2n+1}^{2k+1}, F_{2n+1}^{2k+1}, $(F_{2n+1}^{2k+1})^\star$, G_{2n+1}^{2k+1}, $(G_{2n+1}^{2k+1})^\star$ et H_{2n+1}^{2k+1}, où $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n-2$. De plus, le sommet $2k+1$ est l'unique sommet non critique de chacun de ces tournois.*

3.2 Tournois indécomposables

Nous rappelons les notations et les faits suivants, concernant les tournois indécomposables.

Definition 3.2.1. *Soit $T := (S, A)$ un tournoi. À toute partie X de S telle que $\mid X \mid \geq 3$ et le sous-tournoi $T(X)$ est indécomposable, on associe les parties de $S - X$ suivantes.*

- $[X] := \{x \in S - X : x \sim X\}$.

- *Pour tout* $u \in X$, $X(u) := \{x \in S - X : \ \{u, x\}$ *est un intervalle de* $T(X \cup \{x\})\}$.
- $Ext(X) := \{x \in S - X : \ T(X \cup \{x\})$ *est indécomposable*$\}$.

Lemme 3.2.1 ([13]). *Soient* $T := (S, A)$ *un tournoi et* X *une partie de* S *tels que* $\mid X \mid \geq 3$ *et* $T(X)$ *est indécomposable. La famille* $\{X(u) : \ u \in X\} \cup \{Ext(X), [X]\}$ *forme une partition de* $S - X$ *. De plus, les assertions suivantes sont vérifiées.*

- *Soient* $u \in X$, $x \in X(u)$ *et* $y \in S - (X \cup X(u))$. *Si* $T(X \cup \{x, y\})$ *est décomposable, alors* $\{u, x\}$ *est un intervalle de* $T(X \cup \{x, y\})$.
- *Soient* $x \in [X]$ *et* $y \in S - (X \cup [X])$. *Si* $T(X \cup \{x, y\})$ *est décomposable, alors* $X \cup \{y\}$ *est un intervalle de* $T(X \cup \{x, y\})$.
- *Soient* $x \neq y \in Ext(X)$. *Si* $T(X \cup \{x, y\})$ *est décomposable, alors* $\{x, y\}$ *est un intervalle de* $T(X \cup \{x, y\})$.

De ce lemme découle le résultat suivant.

Corollaire 3.2.1 ([13]). *Soit* $T := (S, A)$ *un tournoi indécomposable. Si* X *est une partie de* S *telle que* $\mid X \mid \geq 3$, $\mid S - X \mid \geq 2$ *et* $T(X)$ *est indécomposable, alors il existe deux sommets distincts* x *et* y *de* $S - X$ *tels que* $T(X \cup \{x, y\})$ *est indécomposable.*

3.3 Graphe d'indécomposabilité

Rappelons qu'à chaque tournoi indécomposable $T := (S, A)$ d'ordre ≥ 3 est associé son graphe d'indécomposabilité $I(T)$ défini sur S comme suit. Pour tous $x \neq y \in S$, $\{x, y\}$ est une arête de $I(T)$ si $T - \{x, y\}$ est indécomposable. Ce graphe est un outil important dans notre construction des tournois (-1)-critiques. Notons qu'un tournoi

T et son dual $T^\star$ ont les mêmes intervalles. Il s'ensuit que T et $T^\star$ ont les mêmes sommets critiques ainsi que le même graphe d'indécomposabilité.

Dans la suite de ce paragraphe, nous étudions le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique.

Rappelons, d'adord, les deux lemmes suivants.

Lemme 3.3.1 ([10]). *Soient $T := (S, A)$ un tournoi indécomposable et x un sommet critique de T. Alors $d_{I(T)}(x) \leq 2$ et on a :*
- *Si $V_{I(T)}(x) = \{y\}$, où $y \in S$, alors $T - \{x, y\}$ est un intervalle de $T - x$.*
- *Si $V_{I(T)}(x) = \{y, z\}$, où $y \neq z \in S$, alors $\{y, z\}$ est un intervalle de $T - x$.*

Lemme 3.3.2 ([10]). *Le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique admet une unique composante connexe de cardinal ≥ 2.*

Le lemme suivant précise l'ordre d'un tournoi (-1)-critique.

Lemme 3.3.3. *L'ordre d'un tournoi (-1)-critique est impair et supérieur ou égal à 7.*

Preuve. Les tournois à 4 sommets sont, à des isomorphismes près, au nombre de quatre et sont tous décomposables. Il s'ensuit que les tournois indécomposables à 5 sommets sont critiques. Ainsi, il n'existe aucun tournoi (-1)-critique d'ordre 5.

Soit T un tournoi indécomposable à au moins 3 sommets. Pour tout sommet x de T, il existe deux sommets $y \neq z$ de $T - x$ tels que $T(\{x, y, z\}) \simeq C_3$. En effet, autrement, il existe un sommet α de T tel que $V_T^-(\alpha) \longrightarrow V_T^+(\alpha)$. Si $\mid V_T^-(\alpha) \mid = \mid V_T^+(\alpha) \mid =$

1 alors $T \simeq \mathcal{O}_3$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. Sinon, $V_T^-(\alpha)$ ou $V_T^+(\alpha)$ est un intervalle non trivial de T, une contradiction. Supposons, à présent, que le tournoi T est (-1)-critique et désignons par a son unique sommet non critique. D'après ce qui précède, il existe deux sommets $b \neq c$ de $T - a$ tel que $T(\{a, b, c\}) \simeq C_3$. Si le tournoi T est d'ordre pair, alors par une suite finie d'applications du corollaire 3.2.1, on obtient un sommet $\omega \in S(T) - \{a\}$ tel que le tournoi $T - \omega$ est indécomposable. Contradiction.

$\square$

Le résultat suivant complète le lemme 3.3.1 dans le cas des tournois (-1)-critiques.

Lemme 3.3.4. *Étant donné un tournoi (-1)-critique T, le sommet non critique a de T vérifie $d_{I(T)}(a) = 2$.*

Preuve. Comme $T - a$ est un tournoi indécomposable qui est, d'après le lemme 3.3.3, d'ordre pair, il s'ensuit que $T - a$ n'est ni critique ni (-1)-critique. Il existe alors deux sommets distincts x, $y \in S - \{a\}$ tels que les tournois $T - \{a, x\}$ et $T - \{a, y\}$ sont indécomposables. Ainsi $\{x, y\} \subseteq V_{I(T)}(a)$, de sorte que $d_{I(T)}(a) \geq 2$. Supposons que $d_{I(T)}(a) \geq 3$ et considérons 3 sommets deux à deux distincts x, y et z de $V_{I(T)}(a)$. On pose $X := S - \{a, x\}$, $Y := S - \{a, y\}$ et $Z := S - \{a, z\}$. Les tournois T, $T(X)$, $T(Y)$ et $T(Z)$ sont indécomposables avec, d'après le lemme 3.3.3, $\mid X \mid = \mid Y \mid = \mid Z \mid \geq 5$.

Les tournois $T-x$, $T-y$ et $T-z$ étant décomposables, alors $a \notin Ext(X) \cup Ext(Y) \cup Ext(Z)$. Nous montrons d'abord qu'il existe $(u,v,w) \in X \times Y \times Z$ tel que $a \in X(u) \cap Y(v) \cap Z(w)$. Supposons, par exemple, qu'il n'existe pas un $u \in X$ tel que $a \in X(u)$, ce qui équivaut à dire, d'après le lemme 3.2.1, que $a \in [X]$. Quitte à remplacer T par $T^\star$, on peut supposer que $a \longrightarrow X$ et donc $x \longrightarrow a$. Remarquons que $a \notin [Y]$, sinon, comme $z \in X \cap Y$ et $a \longrightarrow X$, alors $a \longrightarrow Y$ et en particulier $a \longrightarrow x$, une contradiction. De même $a \notin [Z]$. Comme de plus, $a \notin Ext(Y) \cup Ext(Z)$, alors, d'après le lemme 3.2.1, il existe $(v,w) \in Y \times Z$ tel que $a \in Y(v) \cap Z(w)$.

On a forcément $v \neq w$. Sinon, comme $a \longrightarrow X$ et $a \in Y(v)$ (resp. $a \in Z(v)$), alors $v \longrightarrow S - \{v,a,x,y\}$ (resp. $v \longrightarrow S - \{v,a,x,z\}$). Il s'ensuit que $v \longrightarrow S - \{v,a,x\}$ et en particulier $v \neq x$, autrement $\{x,a\} \longrightarrow X$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. Comme de plus $\mid X \mid \geq 5$, alors $S - \{v,a,x\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T(X)$. Contradiction. De plus, $\{v,w\} \cap \{x,y,z\} \neq \emptyset$. Sinon, comme d'une part $a \longrightarrow X$, en particulier $a \longrightarrow \{v,w\}$, et d'autre part $a \in Y(v)$ (resp. $a \in Z(w)$), il s'ensuit que $v \longrightarrow w$ (resp. $w \longrightarrow v$). Contradiction. Cela nous amène à distinguer les cas suivants.

- $x \notin \{v,w\}$. Dans ce cas $\{v,w\} \cap \{y,z\} \neq \emptyset$. Si, par exemple, $v = z$, alors $\{a,z\}$ et $\{a,w\}$ sont des intervalles respectifs de $T-y$ et de $T-z$, de sorte que $\{z, w\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T - \{a, y\}$. Contradiction.

- $x \in \{v, w\}$. Supposons, par exemple, que $v = x$. Dans ce cas $a \in Y(x)$, et comme $x \longrightarrow a \longrightarrow X$, alors $x \longrightarrow S - \{x, y\}$. Il s'ensuit que $S - \{a, x, y\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T - \{a, y\}$. Contradiction.

Il est, à présent, établi qu'il existe $(u, v, w) \in X \times Y \times Z$ tel que $a \in X(u) \cap Y(v) \cap Z(w)$. D'une part, les sommets u, v et w sont deux à deux distincts ; autrement, si par exemple $u = v$, alors $\{a, u\}$ est un intervalle de chacun des tournois $T - x$ et $T - y$ ce qui implique que $\{a, u\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable T. Contradiction. D'autre part, $\{u, v, w\} \cap \{x, y, z\} \neq \emptyset$; sinon, pour tout $\alpha \in \{u, v, w\}$, $\{u, v, w\} - \{\alpha\}$ est un intervalle de $T(\{u, v, w\})$. Une contradiction, car dans chacun des deux tournois à 3 sommets (C_3 et $\mathcal{O}_3$), il existe une paire de sommets qui n'est pas un intervalle. Supposons alors, par exemple, que $u = y$. Les paires $\{u, a\}$ et $\{v, a\}$ sont alors des intervalles respectifs des tournois $T - x$ et $T - u$. Ainsi $\{u, v\}$ est un intervalle non trivial, de $T - \{a, x\}$ si $v \neq x$, de $T - a$ si $v = x$. Une contradiction, puisque les tournois $T - \{a, x\}$ et $T - a$ sont indécomposables.

$\square$

Le lemme suivant précise la composante connexe, non réduite à un singleton, du graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique.

Lemme 3.3.5. *Si T est un tournoi (-1)-critique, alors $I'(T)$ est un chemin.*

Preuve. Rappelons que, d'après le lemme 3.3.2, $I(T)$ admet une unique composante connexe $\mathcal{C}$, non réduite à un singleton. De plus, d'après les lemmes 3.3.1 et 3.3.4, pour tout sommet $x \in \mathcal{C}$, on a : $1 \leq \mid V_{I(T)(\mathcal{C})}(x) \mid \leq 2$. Il s'ensuit que $I(T)(\mathcal{C})$ est ou bien un chemin ou bien un cycle. Supposons que $I(T)(\mathcal{C})$ est le cycle C_n défini sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{N}_{n-1}$ où $n \geq 3$ et où 0 est l'unique sommet non critique de T. Soit $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. Comme i est un sommet critique de T avec $V_{I(T)}(i) = \{i-1, i+1\}$, alors $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $T - i$, sans être un intervalle de T, de sorte que $(i-1, i) \equiv (i, i+1)$. Quitte à remplacer T par $T^{\star}$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1$. Il s'ensuit que pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $i \longrightarrow i+1$, en particulier $n-1 \longrightarrow 0$. Si $j > 1$ est un sommet impair de $\mathcal{C}$, alors $j-1$ est un sommet critique de T avec $V_{I(T)}(j-1) = \{j-2, j\}$. Il s'ensuit que $\{j-2, j\}$ est un intervalle du tournoi $T - \{j-1\}$, et comme $j - 1 \neq 0$, alors $(0, j) \equiv (0, j-2)$. Ainsi, pour tout sommet impair k de $\mathcal{C}$, on a : $(0, 1) \equiv (0, 3) \equiv \cdots \equiv (0, k)$, et comme $0 \longrightarrow 1$, alors $0 \longrightarrow k$. Il s'ensuit que $0 \longrightarrow \{k \in \mathcal{C} : k \text{ est impair}\}$. Comme $n-1 \longrightarrow 0$, alors n est impair. Posons $n - 1 := 2m$ et distinguons les deux cas suivants.

– $\mathcal{C} \neq S$. Soit $x \in S - \mathcal{C}$. Comme pour tout $i \in \{1, \cdots, 2m\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $T-i$, alors $(x,0) \equiv (x,2) \equiv \cdots \equiv (x,2m)$ et $(x,0) \equiv (x,2m-1) \equiv \cdots \equiv (x,1)$. Il s'ensuit que $x \sim \mathcal{C}$ et donc $\mathcal{C}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable T. Contradiction.

– $\mathcal{C} = S$. D'une part, $0 \longrightarrow 1$ donc $1 \longrightarrow \{i \in S - \{0\} : i \text{ est pair}\}$; d'autre part, $2m-1 \longrightarrow 2m$ donc $\{i \in S : i \text{ est impair}\} \longrightarrow 2m$. le tournoi $T-0$ étant indécomposable, il existe deux sommets k et l de $T-0$ tels que $k \longrightarrow 1$ et $2m \longrightarrow l$. D'après ce qui précède, k est impair et l est pair. Comme $k \longrightarrow 1$ et k est impair (resp. $2m \longrightarrow l$ et l est pair), alors $\{i \in S - \{1\} : i \text{ est impair}\} \longrightarrow 1$ (resp. $2m \longrightarrow \{i \in S - \{0, 2m\} : i \text{ est pair}\}$). Ainsi, $\{i \in S - \{1\} : i \text{ est impair}\} \longrightarrow \{1, 2m\} \longrightarrow \{i \in S - \{0, 2m\} : i \text{ est pair}\}$. En particulier, $\{1, 2m\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T-0$. Contradiction.

□

3.4 Preuve du théorème 3.1.1

Nous montrons d'abord que les tournois introduits dans le théorème 3.1.1 sont (-1)-critiques et deux à deux non isomorphes.

Proposition 3.4.1. *Soient n et k deux entiers tels que $n \geq 3$ et $k \in \{1, \cdots, n-2\}$. Les tournois E^{2k+1}_{2n+1}, F^{2k+1}_{2n+1}, G^{2k+1}_{2n+1} et H^{2k+1}_{2n+1} sont des tournois (-1)-critiques dont* *l'unique sommet non critique est* $2k+1$.

Preuve. Vérifions d'abord que pour $W := E^{2k+1}_{2n+1}$, F^{2k+1}_{2n+1}, G^{2k+1}_{2n+1} ou H^{2k+1}_{2n+1}, on a :

$$\forall i \in S(W) - \{2k+1\},\ W - \{i\} \text{ est décomposable.} \tag{3.1}$$

En effet, pour $i = 0$ (resp. $i = 2n$), $\{2, \cdots, 2n\}$ (resp. $\mathbb{N}_{2n-2}$) est un intervalle non trivial de $W - i$. Pour $i \in \{1, \cdots, 2k-2\} \cup \{2k\} \cup \{2k+2, \cdots, 2n-2\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle non trivial de $W - i$. Pour $i = 2k-1$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle non trivial de chacun des tournois $E^{2k+1}_{2n+1} - i$, $F^{2k+1}_{2n+1} - i$ et $G^{2k+1}_{2n+1} - i$, et $\{i-1, i+2\}$ est un intervalle non trivial de $H^{2k+1}_{2n+1} - i$. Pour $i = 2n-1$, $\{i-1, i+1\}$ (resp. $\mathbb{N}_{2n-3} \cup \{2n\}$) est un intervalle non trivial de chacun des tournois $E^{2k+1}_{2n+1} - i$ et $F^{2k+1}_{2n+1} - i$ (resp. $G^{2k+1}_{2n+1} - i$ et $H^{2k+1}_{2n+1} - i$).

Fixons maintenant un entier $k \geq 1$, et montrons la proposition par récurrence sur l'entier $n \geq k+2$. Commençons par examiner le cas où $n = k+2$. Nos tournois sont maintenant définis sur $\mathbb{N}_{2k+4}$, on pose $X := \mathbb{N}_{2k+4} - \{2k+1, 2k+2\}$. Les tournois $E^{2k+1}_{2k+5}(X)$, $F^{2k+1}_{2k+5}(X)$, $G^{2k+1}_{2k+5}(X)$ et $H^{2k+1}_{2k+5}(X)$ sont indécomposables. En effet, d'une part $E^{2k+1}_{2k+5}(X) \simeq H^{2k+1}_{2k+5}(X) \simeq V_{2k+3}$ (les sous-tournois transitifs d'ordre $(2k+2)$ des tournois $E^{2k+1}_{2k+5}(X)$ et $H^{2k+1}_{2k+5}(X)$ sont respectivement $0 < \cdots < 2k < 2k+3$ et $0 < \cdots < 2k-1 < 2k+3 < 2k+4$) ; d'autre part, $F^{2k+1}_{2k+5}(X) = G^{2k+1}_{2k+5}(X) \simeq U_{2k+3}$

(un isomorphisme sur U_{2k+3} fixe chacun des sommets de $\mathbb{N}_{2k}$, envoie $2k+3$ sur $2k+1$ et $2k+4$ sur $2k+2$). Soit $T := E^{2k+1}_{2k+5}$, F^{2k+1}_{2k+5}, G^{2k+1}_{2k+5} ou H^{2k+1}_{2k+5}. Dans le tournoi T, $2k+1 \in X(2k+3)$ et, comme $1 \longrightarrow 2k+2 \longrightarrow 2k+3$, alors $2k+2 \notin [X]$. Montrons que $2k+2 \in Ext(X)$, ce qui signifie que :

$$T - \{2k+1\} \text{ est indécomposable .} \tag{3.2}$$

Supposons par l'absurde qu'il existe $u \in X$ tel que $2k+2 \in X(u)$. Pour $T = E^{2k+1}_{2k+5}$ ou F^{2k+1}_{2k+5}, $2k+2 \longrightarrow \{0, 2k+4\}$ et, comme il n'existe aucun sommet $x \in X$ vérifiant $x \longrightarrow \{0, 2k+4\}$, alors $u \in \{0, 2k+4\}$, ce qui contredit les faits que $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2k+2$ et $2k+2 \longrightarrow 2k+3 \longrightarrow 2k+4$. Pour $T = G^{2k+1}_{2k+5}$ (resp. H^{2k+1}_{2k+5}), $\mathbb{N}_{2k} \longrightarrow 2k+2$ et $T(\mathbb{N}_{2k}) = U_{2k+1}$ (resp. V_{2k+1}), en particulier $T(\mathbb{N}_{2k})$ est indécomposable. Il s'ensuit que $u \notin \mathbb{N}_{2k}$, autrement, $\mathbb{N}_{2k} - \{u\} \longrightarrow u$, ce qui contredit l'indécomposabilité de $T(\mathbb{N}_{2k})$. Ainsi, $u \in \{2k+3, 2k+4\}$, contredisant le fait que $2k+2 \longrightarrow 2k+3 \longrightarrow 2k+4 \longrightarrow 2k+2$.

Comme $2k+1 \in X(2k+3)$ et $2k+2 \in Ext(X)$ et $2k+1 \longrightarrow 2k+2 \longrightarrow 2k+3$, alors, d'après le lemme 3.2.1, le tournoi T est indécomposable et, d'après (3.1) et (3.2), $2k+1$ est l'unique sommet non critique de T.

À présent, soit un entier $n > k+2$. On pose $X_n := \mathbb{N}_{2n} - \{2k+2, 2k+3\}$

et $X'_n := X_n - \{2k+1\}$. Soit $D := E$, F, G ou H. L'application f de X_n sur $\mathbb{N}_{2n-2}$ définie par $f(i) := i$ (resp. $f(i) := i-2$) si $i \in \mathbb{N}_{2k+1}$ (resp. $i \in \{2k+4, \cdots, 2n\}$), est un isomorphisme de $D^{2k+1}_{2n+1}(X_n)$ sur D^{2k+1}_{2n-1}, qui fixe le sommet $2k+1$. Il s'ensuit, en appliquant l'hypothèse de récurrence, que $D^{2k+1}_{2n+1}(X_n)$ est un tournoi (-1)-critique dont l'unique sommet non critique est $2k+1$. Le tournoi $D^{2k+1}_{2n+1}(X'_n)$ est ainsi indécomposable. On a bien $2k+2 \in X_n(2k+4)$ et $2k+3 \in X_n(2k+1)$, en particulier, $2k+2 \in X'_n(2k+4)$ et $D^{2k+1}_{2n+1}(X'_n \cup \{2k+3\}) \simeq D^{2k+1}_{2n+1}(X_n) \simeq D^{2k+1}_{2n-1}$. Le tournoi $D^{2k+1}_{2n+1}(X'_n \cup \{2k+3\})$ étant alors indécomposable, $2k+3 \in Ext(X'_n)$. Comme de plus, $2k+2 \longrightarrow 2k+3 \longrightarrow 2k+4$, alors, d'après le lemme 3.2.1, les tournois D^{2k+1}_{2n+1} et $D^{2k+1}_{2n+1} - \{2k+1\}$ sont indécomposables. Avec (3.1), $2k+1$ est l'unique sommet non critique de D^{2k+1}_{2n+1}.

$\square$

Corollaire 3.4.1. *Pour tout $n \geq 3$, les $6(n-2)$ tournois de la classe $\mathcal{D}_{2n+1} := \mathcal{E}_{2n+1} \cup \mathcal{F}_{2n+1} \cup \mathcal{F}^{\star}_{2n+1} \cup \mathcal{G}_{2n+1} \cup \mathcal{G}^{\star}_{2n+1} \cup \mathcal{H}_{2n+1}$ sont deux à deux non isomorphes.*

Preuve. Soient T et T' deux tournois isomorphes de la classe $\mathcal{D}_{2n+1}$. D'après la proposition 3.4.1, T et T' sont (-1)-critiques. Désignons alors par a et a' leurs sommets non critiques respectifs. Par construction des différentes classes, le tournoi T est dans la classe $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{F}_{2n+1}$, $\mathcal{F}^{\star}_{2n+1}$, $\mathcal{G}_{2n+1}$, $\mathcal{G}^{\star}_{2n+1}$ $\mathcal{H}_{2n+1}$) si et seulement si les tournois

$T(V_T^+(a))$ et $T(V_T^-(a))$ sont transitifs (resp. le tournoi $T(V_T^+(a))$ est transitif et le tournoi $T(V_T^-(a))$ n'est pas transitif, le tournoi $T(V_T^+(a))$ n'est pas transitif et le tournoi $T(V_T^-(a))$ est transitif, il existe un unique sommet de $V_T^+(a)$ qui domine au moins deux sommets de $V_T^-(a)$, il existe un unique sommet de $V_T^-(a)$ qui soit dominé par au moins deux sommet de $V_T^+(a)$, $\mid A(T) \cap (V_T^+(a) \times V_T^-(a)) \mid= 1$). Il s'ensuit que si T est un tournoi de la classe $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{F}_{2n+1}$, $\mathcal{F}^\star_{2n+1}$, $\mathcal{G}_{2n+1}$ $\mathcal{G}^\star_{2n+1}$, $\mathcal{H}_{2n+1}$), il en est de même pour le tournoi T'. Si T et T' sont dans la même classe $\mathcal{E}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{F}_{2n+1}$, $\mathcal{G}_{2n+1}$, $\mathcal{H}_{2n+1}$), alors il existe deux entiers k, $k' \in \mathbb{N}_{n-2}$ tels que $T = E^{2k+1}_{2n+1}$ (resp. F^{2k+1}_{2n+1}, G^{2k+1}_{2n+1}, H^{2k+1}_{2n+1}) et $T' = E^{2k'+1}_{2n+1}$ (resp. $F^{2k'+1}_{2n+1}$, $G^{2k'+1}_{2n+1}$, $H^{2k'+1}_{2n+1}$). D'après la proposition 3.4.1, $a = 2k + 1$ et $a' = 2k' + 1$. Ainsi, $\mid V_T^-(a) \mid= 2k + 1$ et $\mid V_{T'}^-(a') \mid= 2k' + 1$. Or, comme un isomorphisme de T sur T' envoie a sur a', on a $\mid V_T^-(a) \mid=\mid V_{T'}^-(a') \mid$. Il s'ensuit que $k = k'$ et donc $T = T'$. Si enfin T et T' sont dans la même classe $\mathcal{F}^\star_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{G}^\star_{2n+1}$), alors $T^\star$ et $T'^\star$ sont dans la même classe $\mathcal{F}_{2n+1}$ (resp. $\mathcal{G}_{2n+1}$) de sorte que, d'après ce qui précède, $T^\star = T'^\star$ et donc $T = T'$.

□

Il est commode d'introduire les deux lemmes suivants, avant d'entamer la preuve du théorème.

Lemme 3.4.1. *Soit $T := (S, A)$ un tournoi (-1)-critique, avec $I(T)(\mathcal{C}) := P_{m+1}$ où*

$\mathcal{C} := \mathbb{N}_m$ est la composante connexe, non réduite à un singleton, de $I(T)$. On désigne par a le sommet non critique de T et on pose $A_I^+ := \{i \in \mathcal{C} : i > a$ et i est impair$\}$, $A_I^- := \{i \in \mathcal{C} : i < a$ et i est impair$\}$, $A_P^+ := \{i \in \mathcal{C} : i > a$ et i est pair$\}$ et $A_P^- := \{i \in \mathcal{C} : i < a$ et i est pair$\}$. Pour $W := T(A_P^+)$, $T(A_P^-)$, $T(A_I^+)$ ou $T(A_I^-)$, on a $W = \underline{S(W)}$ ou $\underline{S(W)}^\star$.

Preuve. Il suffit de considérer le cas où $\mid S(W) \mid \geq 3$. On pose alors $S(W) := \{w_1, \cdots, w_q\}$, où $q \geq 3$ et $w_1 < \cdots < w_q$. Soit $k \in \{2, \cdots, q\}$. On a $w_{k-1} + 1 \in \mathcal{C} - \{0, m\}$ et donc $d_{I(T)}(w_{k-1} + 1) = 2$. En utilisant le lemme 3.3.1, $\{w_{k-1}, w_k\}$ est un intervalle de $T - \{w_{k-1} + 1\}$ et, comme $w_{k-1} + 1 \notin S(W)$, alors $\{w_{k-1}, w_k\}$ est un intervalle de W. Il s'ensuit que pour tous $i < j \in \{1, \cdots, q\}$, $(w_i, w_j) \equiv \cdots \equiv (w_1, w_j) \equiv (w_1, w_{j-1}) \equiv \cdots \equiv (w_1, w_2)$. Il en découle que si $w_1 \longrightarrow w_2$ (resp. $w_2 \longrightarrow w_1$), alors $W = \underline{S(W)}$ (resp. $W = \underline{S(W)}^\star$).

$\square$

Lemme 3.4.2. *Soit $T := (S, A)$ un tournoi (-1)-critique, avec $S := \mathbb{N}_{2n}$ et $I(T)(\mathcal{C}) := P_{m+1}$ où $\mathcal{C} := \mathbb{N}_m$ est la composante connexe, non réduite à un singleton, de $I(T)$. Alors $m \geq 3$, et si $0 \longrightarrow 1$, alors $V_T^+(1) = \{2, \cdots, 2n\}$ et $V_T^+(m-1) = \{m\}$. De plus, en désignant par a le sommet non critique de T, les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Si a est impair, alors pour tout sommet impair i, on a :*
   - *Si $i \in \{1, \cdots, m\}$, alors $V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}$.*
   - *Si $i \in \{1, \cdots, m-a\}$, alors $V_T^+(m-i) = \{m-i+1, \cdots, m\}$.*

En particulier, ou bien $S - \mathcal{C} = \emptyset$, ou bien m est impair.

2. *Si a et m sont pairs, alors pour tout sommet impair i, on a :*
   - *Si $i \in \{1, \cdots, a-1\}$, alors $V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}$.*
   - *Si $i \in \{1, \cdots, m-a-1\}$, alors $V_T^+(m-i) = \{m-i+1, \cdots, m\}$.*

   En particulier, $S - \mathcal{C} \neq \emptyset$.

Preuve. Notons d'abord que, d'après les lemmes 3.3.5 et 3.3.4, $I(T)(\mathcal{C})$ est un chemin et $a \in \{1, \cdots, m-1\}$. On a bien $m \geq 3$, autrement, $m = 2$ et $a = 1$ et dans ce cas, d'après le lemme 3.3.1, $S - \{0, 1\}$ et $S - \{1, 2\}$ sont des intervalles respectifs des tournois $T - 0$ et $T - 2$, de sorte que $1 \sim S - \{0, 1\}$ et $1 \sim S - \{1, 2\}$. Comme de plus, $(S - \{0, 1\}) \cap (S - \{1, 2\}) \neq \emptyset$, alors $1 \sim S - \{1\}$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. D'après le lemme 3.3.1, $1 \sim S - \{0, 1\}$ et $m-1 \sim S - \{m-1, m\}$ et, comme T est indécomposable avec $0 \longrightarrow 1$, alors $V_T^+(1) = \{2, \cdots, 2n\}$, en particulier, $1 \longrightarrow m-1$ et donc $V_T^+(m-1) = \{m\}$. Supposons, à présent, que a est impair et montrons, par récurrence finie, l'assertion 1. D'après ce qui précède, l'assertion est vérifiée pour $i = 1$. Si i est un sommet impair avec $3 \leq i \leq m$ (resp. $3 \leq i \leq m - a$), alors, par hypothèse de récurrence, $V_T^+(i-2) = \{i-1, \cdots, 2n\}$ (resp. $V_T^+(m-i+2) = \{m-i+3, \cdots, m\}$). Dans ce cas, $i-1$ (resp. $m-i+1$) est un sommet critique de T avec $V_{I(T)}(i-1) = \{i, i-2\}$ (resp. $V_{I(T)}(m-i+1) = \{m-i, m-i+2\}$) de sorte que, d'après le lemme 3.3.1, $\{i, i-2\}$ (resp. $\{m-i, m-i+2\}$) est un intervalle de $T - \{i-1\}$

(resp. $T-\{m-i+1\}$), sans être un intervalle de T. Il s'ensuit, en utilisant l'hypothèse de récurrence, que $V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}$ (resp. $V_T^+(m-i) = \{m-i+1, \cdots, m\}$). En particulier, si m est pair, alors $V_T^+(m-1) = \{m\} = \{m, \cdots, 2n\}$, de sorte que $m = 2n$ et donc $S - \mathcal{C} = \emptyset$.

Supposons maintenant que a et m sont pairs et montrons, par récurrence finie, l'assertion 2. Celle-ci est vérifiée pour $i = 1$. Si i est un sommet impair avec $3 \leq i \leq a-1$ (resp. $3 \leq i \leq m-a-1$), alors, par hypothèse de récurrence, $V_T^+(i-2) = \{i-1, \cdots, 2n\}$ (resp. $V_T^+(m- \ i+2) = \{m-i+3, \cdots, m\}$). Dans ce cas, $i-1$ (resp. $m-i+1$) est un sommet critique de T et, en utilisant le lemme 3.3.1, $\{i, i-2\}$ (resp. $\{m-i, m-i+2\}$) est un intervalle de $T - \{i-1\}$ (resp. $T - \{m-i+1\}$), sans être un intervalle de T. Il s'ensuit, en utilisant l'hypothèse de récurrence, que $V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}$ (resp. $V_T^+(m-i) = \{m-i+1, \cdots, m\}$). En particulier, si $S - \mathcal{C} = \emptyset$, c'est à dire $m = 2n$, alors $V_{T-a}^+(a-1) = \{a+1, \cdots, 2n\}$ et $V_{T-a}^+(a+1) = \{a+2, \cdots, 2n\}$, de sorte que $\{a-1, a+1\}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable $T-a$. Contradiction.

$\square$

Maintenant, nous donnons une preuve du théorème 3.1.1, qui repose sur une construction des tournois (-1)-critiques à partir de leurs graphes d'indécomposabilité.

Théorème 3.1.1 *À des isomorphismes près, les tournois (-1)-critiques sont les tournois* E_{2n+1}^{2k+1}, F_{2n+1}^{2k+1}, $(F_{2n+1}^{2k+1})^\star$, G_{2n+1}^{2k+1}, $(G_{2n+1}^{2k+1})^\star$ *et* H_{2n+1}^{2k+1}, *où* $n \geq 3$ *et* $1 \leq k \leq n-2$. *De plus, le sommet* $2k+1$ *est l'unique sommet non critique de chacun de ces tournois.*

Preuve. Soit $T := (S, A)$ un tournoi (-1)-critique. D'après la proposition 3.4.1 et le corollaire 3.4.1, il suffit de montrer que T est dans la classe $\mathcal{E}_{2n+1} \cup \mathcal{F}_{2n+1} \cup \mathcal{F}^\star_{2n+1} \cup \mathcal{G}_{2n+1} \cup \mathcal{G}^\star_{2n+1} \cup \mathcal{H}_{2n+1}$, pour un entier $n \geq 3$. On désigne par a l'unique sommet non critique de T et par $\mathcal{C}$ la composante connexe de $I(T)$, non réduite à un singleton. On pose $I(T)(\mathcal{C}) := P_{m+1}$ et $S := \mathbb{N}_{2n}$, où $n \geq 3$ et $m \leq 2n$. D'après le lemme 3.3.4, $a \in \{1, \cdots, m-1\}$. On pose $A_I^+ := \{i \in \mathcal{C} : i > a$ et i est impair$\}$, $A_I^- := \{i \in \mathcal{C} : i < a$ et i est impair$\}$, $A_P^+ := \{i \in \mathcal{C} : i > a$ et i est pair$\}$, $A_P^- := \{i \in \mathcal{C} : i < a$ et i est pair$\}$, $A^+ := A_P^+ \cup A_I^+$ et $A^- := A_P^- \cup A_I^-$. Quitte à remplacer T par $T^\star$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1$.

Supposons d'abord que a est impair. Soit $(i,j) \in A_P^- \times A_P^+$. D'une part, si $i \neq a-1$ alors, d'après le lemme 3.3.1, $\{i, i+2\}$ est un intervalle de $T - \{i+1\}$, de sorte que $(i,j) \equiv (i+2, j)$. D'autre part, si $j \leq m-2$, alors $\{j, j+2\}$ est un intervalle de

$T - \{j+1\}$, de sorte que $(i, j) \equiv (i, j+2)$. Il s'ensuit que :

$$A_P^- \sim A_P^+. \tag{3.3}$$

Le lemme 3.4.2 nous amène à distinguer les deux cas suivants.

– $S - \mathcal{C} = \emptyset$. Dans ce cas $m = 2n$, et le lemme 3.4.2 donne que :

$$\text{pour tout sommet impair } i \text{ de } T,\ V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}. \tag{3.4}$$

Nécessairement $a+1 \longrightarrow 0$, sinon, d'après (3.3), $A_P^- \longrightarrow A_P^+$ et, en utilisant (3.4), on obtient que $A^- \longrightarrow A^+$, ce qui contredit l'indécomposabilité de $T - a$. Il s'ensuit, en utilisant (3.3), que :

$$A_P^+ \longrightarrow A_P^-. \tag{3.5}$$

On distingue les cas suivants.

– $0 \longrightarrow 2$. Comme $a+1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 2$, et a est impair, alors $a \geq 3$. D'après le lemme 3.4.1, $T(A_P^-) = \underline{A_P^-}$. En utilisant de plus la relation (3.4), on obtient :

$$T(A^-) = \mathcal{O}_a. \tag{3.6}$$

Notons que $a \leq 2n-3$, autrement, $a = 2n-1$ et, en utilisant (3.4), (3.5) et (3.6), $T = V_{2n+1}$, en particulier, T est un tournoi critique, contradiction.

Comme de plus $a \geq 3$, alors $3 \leq a \leq 2n-3$. On pose alors $a = 2k+1$, avec $k \in \{1, \cdots, n-\ 2\}$.

Si $a+1 \longrightarrow a+3$, d'après le lemme 3.4.1, $T(A_P^+) = \underline{A_P^+}$ et en utilisant de plus (3.4), (3.5) et (3.6), on obtient que $T = E_{2n+1}^{2k+1}$.

Si au contraire, $a+3 \longrightarrow a+1$, encore par le lemme 3.4.1, $T(A_P^+) = \underline{A_P^{+\star}}$. En utilisant encore (3.4), (3.5) et (3.6), on trouve que $T \simeq (F_{2n+1}^{2k'+1})^{\star}$, où $k' = n-k-1 \in \{1, \cdots, n-2\}$ (un isomorphisme f de T sur $(F_{2n+1}^{2k'+1})^{\star}$ est défini par : pour tout $i \in \mathbb{N}_{2n}$, $f(i) := 2n-i$).

– $2 \longrightarrow 0$. Dans ce cas, d'après le lemme 3.4.1, $T(A_P^-) = \underline{A_P^{-\star}}$. Notons que $a \leq 2n-3$, autrement, $a = 2n-1$ et, en utilisant de plus (3.4) et (3.5), on obtient que $T = U_{2n+1}$, en particulier, T est un tournoi critique, contradiction. Nécessairement $a+1 \longrightarrow a+3$, sinon, par le lemme 3.4.1, $T(A_P^+) = \underline{A_P^{+\star}}$. En utilisant, en outre, (3.4) et (3.5), on obtient que $T = U_{2n+1}$, en particulier T est critique, contradiction. Il s'ensuit, encore par le lemme 3.4.1, que $T(A_P^+) = \underline{A_P^+}$. En particulier, $a \geq 3$, autrement, $a = 1$ et en utilisant de plus (3.4) et (3.5), on obtient que $T \simeq V_{2n+1}$ (le sous-tournoi transitif d'ordre $2n$ de T étant : $1 < 2 < \cdots < 2n$). Comme de plus $a \leq 2n-3$, alors $3 \leq a \leq 2n-3$. On pose alors $a = 2k+1$, avec $k \in \{1, \cdots, n-2\}$. En utilisant (3.4), (3.5) et le fait que $T(A_P^+) = \underline{A_P^+}$ et $T(A_P^-) = \underline{A_P^-}^\star$, on obtient que $T = F_{2n+1}^{2k+1}$.

– m est impair. Dans ce cas $S - \mathcal{C} \neq \emptyset$, et le lemme 3.4.2 nous donne les deux faits suivants.

$$\text{pour tout sommet impair } i \in \{1, \cdots, m\},\ V_T^+(i) = \{i+1, \cdots, 2n\}. \tag{3.7}$$

$$T(A_P^+) = \underline{A_P^+},\ \text{ et } A^- \cup (S - \mathcal{C}) \longrightarrow A_P^+. \tag{3.8}$$

Soit $\mu \in S - \mathcal{C}$ et soit $i \in A_P^- - \{0\}$. Comme $\{i, i-2\}$ est un intervalle de $T - \{i-1\}$ et $\mu \neq i-1$, alors $(i, \mu) \equiv (i-2, \mu) \equiv \cdots \equiv (0, \mu)$. Il s'ensuit que :

$$\text{pour tout } \mu \in S - \mathcal{C},\ \mu \sim A_P^-. \tag{3.9}$$

Il existe alors $\lambda \in S - \mathcal{C}$ tel que $\lambda \longrightarrow 0$. Autrement, $0 \longrightarrow S - \mathcal{C}$ et, en utilisant (3.9), on obtient que $A_P^- \longrightarrow S - \mathcal{C}$. Il s'ensuit, en utilisant de plus (3.7) et (3.8), que $A^- \longrightarrow S - A^-$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. Ainsi, de nouveau par (3.9), $\lambda \longrightarrow A_P^-$. Supposons par l'absurde que $0 \longrightarrow 2$. En utilisant (3.7), (3.8) et le lemme 3.4.1, on obtient que $T(\mathcal{C}) = \mathcal{O}_{m+1}$ et on déduit, à l'aide de (3.7), (3.8), (3.9) et le fait que $\lambda \longrightarrow A_P^-$, que $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\}) \simeq V_{m+2}$. Comme le tournoi T n'est pas critique, $S - \mathcal{C} \neq \{\lambda\}$, et puisque $\mid S - \mathcal{C} \mid$

est impair, alors, par une suite finie d'applications du corollaire 3.2.1 au sous-tournoi indécomposable $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ de T, on obtient deux sommets distincts x et y de $S - (\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ tels que $T - \{x, y\}$ est indécomposable. Ceci contredit le fait que $\{x, y\}$ n'est pas une arête de $I(T)$. Ainsi, forcément $2 \longrightarrow 0$ et, d'après le lemme 3.4.1, $T(A_P^-) = \underline{A_P^-}^\star$. De plus, $a \neq 1$, autrement, $A^- = \{0\}$ et $2 \in A_P^+$ de sorte que, d'après (3.8), $0 \longrightarrow 2$, contradiction. On pose alors $n' := \frac{m+1}{2}$ et $a := 2k+1$, où $k \in \{1, \cdots, n'-2\}$. Le tournoi $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ est isomorphe à $G_{2n'+1}^{2k+1}$ (un isomorphisme de $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ sur $G_{2n'+1}^{2k+1}$ envoie λ sur $2n'$ et fixe chaque sommet de $\mathcal{C}$). En particulier, par la proposition 3.4.1, le tournoi $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ est indécomposable. Il s'ensuit que $S - \mathcal{C} = \{\lambda\}$. Autrement, $\mid S - \mathcal{C} \mid$ est impair avec $\mid S - \mathcal{C} \mid \geq 3$ et, par une suite finie d'applications le corollaire 3.2.1 au sous-tournoi indécomposable $T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\})$ de T, on obtient deux sommets distincts x et y de $S - \mathcal{C}$ tels que $T - \{x, y\}$ est indécomposable. Ceci contredit le fait que x est un sommet isolé de $I(T)$. On conclut que $n' = n$ et que $T = T(\mathcal{C} \cup \{\lambda\}) \simeq G_{2n+1}^{2k+1}$.

Il reste à examinier le cas où a est pair. Soit, dans ce cas, σ la permutation de S fixant chaque sommet de $S - \mathcal{C}$ et telle que pour tout $i \in \mathcal{C}$, $\sigma(i) := m - i$. L'application σ est un isomorphisme de T sur un tournoi T'. Si m est impair, alors le sommet non critique de T' est le sommet impair $\sigma(a) = m - a$. On se ramène ainsi au cas précédent et on déduit que T', et par suite T, est un tournoi de la classe $\mathcal{E}_{2n+1} \cup \mathcal{F}_{2n+1} \cup (\mathcal{F}_{2n+1})^\star \cup \mathcal{G}_{2n+1} \cup (\mathcal{G}_{2n+1})^\star$, pour un entier $n \geq 3$. Supposons alors que m est pair. D'après le lemme 3.4.2, d'une part $m \geq 4$, d'autre part, le tournoi T est déterminé par $T(S - (A_I^- \cup A_I^+))$. Posons $R := T(\mathcal{C}_P)$, où $\mathcal{C}_P$ est l'ensemble des sommets pairs de $\mathcal{C}$. On a bien $R = \underline{\mathcal{C}_P}$ ou $\underline{\mathcal{C}_P}^\star$. En effet, si i et j sont deux sommets de $\mathcal{C}_P$, avec $0 < i < j$, alors, en utilisant le lemme 3.3.1, $(i,j) \equiv (i-2,j) \equiv \cdots (0,j) \equiv (0,j-2) \equiv \cdots \equiv (0,2)$. Il s'ensuit que si $0 \longrightarrow 2$ (resp. $2 \longrightarrow 0$), alors $R = \underline{C_P}$ (resp. $R = \underline{C_P}^\star$). Supposons par l'absurde que $2 \longrightarrow 0$. D'après ce qui précède, $R = \underline{C_P}^\star$ et, en utilisant de plus le lemme 3.4.2, $T(\mathcal{C}) = U_{m+1}$. Comme de plus $\mid S - \mathcal{C} \mid$ est pair avec $\mid S - \mathcal{C} \mid \geq 2$, alors, une suite finie d'applications du corollaire 3.2.1 au sous-tournoi-indécomposable $T(\mathcal{C})$ de T, nous donne deux sommets distincts x et y de $S - \mathcal{C}$ tels que $T - \{x, y\}$ est indécomposable. Ceci contredit le fait que x est un sommet isolé de $I(T)$. Ainsi, $0 \longrightarrow 2$, de sorte que $R = \underline{\mathcal{C}_P}$ et, avec le lemme 3.4.2, $T(\mathcal{C}) = \underline{\mathcal{C}}$.

Soit $\nu \in S - \mathcal{C}$ et soit $l \in \mathcal{C}_P - \{0\}$. D'après le lemme 3.3.1, $\{l, l-2\}$ est un intervalle de $T - \{l-1\}$ et, comme $\nu \neq l-1$, alors $(l,\nu) \equiv (l-2,\nu) \equiv \cdots \equiv (0,\nu)$. Il s'ensuit que :

$$\text{pour tout } \nu \in S - \mathcal{C},\ \nu \sim \mathcal{C}_P. \tag{3.10}$$

On en déduit que $V_T^+(0) \cap (S - \mathcal{C}) \neq \emptyset$. Autrement, $(S - \mathcal{C}) \longrightarrow 0$ et, d'après (3.10), $S - \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}_P$, de sorte qu'en utilisant de plus le lemme 3.4.2, on obtient que $S - \mathcal{C}$ est un intervalle non trivial du tournoi indécomposable T. Contradiction. On a aussi $V_T^-(0) \cap (S - \mathcal{C}) \neq \emptyset$. Sinon, comme $T(\mathcal{C}) = \underline{\mathcal{C}}$, $V_T^-(0) = \emptyset$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. On pose $\Gamma^+ := V_T^+(0) \cap (S - \mathcal{C})$ et $\Gamma^- := V_T^-(0) \cap (S - \mathcal{C})$. D'après (3.10), pour tout $(u, v) \in \Gamma^- \times \Gamma^+$, $u \longrightarrow \mathcal{C}_P \longrightarrow v$. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \Gamma^- \times \Gamma^+$ tel que $\beta \longrightarrow \alpha$, autrement, $\Gamma^- \cup A^- \cup \{a\} \longrightarrow \Gamma^+ \cup A^+$, ce qui contredit l'indécomposabilité de T. Il s'ensuit que $T(\mathcal{C} \cup \{\alpha, \beta\}) \simeq H_{2n'+1}^{2k+1}$, où $n' := \frac{m+2}{2} \geq 3$ et $k := \frac{a}{2} \in \{1, \cdots, n'-2\}$ (un isomorphisme ϕ de $T(\mathcal{C} \cup \{\alpha, \beta\})$ sur $H_{2n'+1}^{2k+1}$ est défini par $\phi(i) := i$ (resp. $i+1$), si $i \in \mathbb{N}_{2k-1}$ (resp. $i \in \{2k, \cdots, m\}$), $\phi(\alpha) := 2k$ et $\phi(\beta) := 2n'$). Il s'ensuit que $S - \mathcal{C} = \{\alpha, \beta\}$, et donc $n' = n$ et $T = T(\mathcal{C} \cup \{\alpha, \beta\}) \simeq H_{2n+1}^{2k+1}$. Autrement, $\mid S - \mathcal{C} \mid$ étant pair, par une suite finie d'applications du corollaire 3.2.1 au sous-tournoi indécomposable $T(\mathcal{C} \cup \{\alpha, \beta\})$ de T, on obtient deux sommets distincts x et y de $S - \mathcal{C}$ tels que $T - \{x, y\}$ est indécomposable. Ceci contredit le fait que x est un sommet isolé de $I(T)$.

$\square$

Cette preuve du théorème 3.1.1, donne les tournois (-1)-critiques avec leurs graphes d'indécomposabilité. Nous en dégageons la remarque suivante.

Remarque 3.4.1. *Le graphe d'indécomposabilité d'un tournoi (-1)-critique admet au plus deux sommets isolés. Plus précisément, pour* $n \geq 3$ *et pour* $1 \leq k \leq n-2$*, on a :*

- $I(E_{2n+1}^{2k+1}) = I(F_{2n+1}^{2k+1}) = P_{2n+1}$.
- $I(G_{2n+1}^{2k+1})$ *est obtenu à partir de* P_{2n+1} *en supprimant l'arête* $\{2n-1, 2n\}$.
- $I(H_{2n+1}^{2k+1})$ *est obtenu à partir de* P_{2n+1} *en supprimant les trois arêtes* $\{2n-1, 2n\}$, $\{2k-1, 2k\}$, $\{2k, 2k+1\}$, *et en ajoutant la paire* $\{2k-1, 2k+1\}$ *comme nouvelle arête.*

Notons que, d'après le lemme 3.3.4, si a est le sommet non critique d'un tournoi (-1)-critique T , alors $T - a$ est un tournoi (-2)-critique. Nous obtenons alors des classes de tournois (-2)-critiques, à partir des classes des tournois (-1)-critiques. Cela nous amène à poser le problème suivant.

Problème 3.4.1. *Caractériser les tournois* (-2)*-critiques.*

Chapitre 4

Les graphes (-1)-critiques

Résumé.

En 1993, J.H. Schmerl et W.T. Trotter [30] ont caractérisé les graphes critiques. Dans ce chapitre, nous caractérisons les graphes (-1)-critiques. Nous donnons ainsi une réponse complète au problème posé par Y. Boudabbous et P. Ille [10], et nous généralisons la caractérisation des tournois (-1)-critiques obtenue au chapitre 2.

Mots clés : Arbre étoilé, Chemin, Critique, Cycle, Graphe d'indécomposabilité, Intervalle, Graphe indécomposable, Graphe (-1)-critique.

4.1 Graphes indécomposables

Les graphes considérés dans ce chapitre sont des graphes finis et non vides. Nous rappelons d'abord quelques notations et quelques propriétés des graphes indécomposables.

Definition 4.1.1. *Soit* $G := (S, A)$ *un graphe. À toute partie* X *de* S *telle que* $\mid X \mid \geq 3$ *et le sous-graphe* $G(X)$ *est indécomposable, on associe les parties de* $S - X$ *suivantes.*

- $[X] := \{x \in S - X : X$ *est un intervalle de* $G(X \cup \{x\})\}$.
- *Pour tout* $u \in X$, $X(u) := \{x \in S - X : \{u, x\}$ *est un intervalle de* $G(X \cup \{x\})\}$.
- $Ext(X) := \{x \in S - X : G(X \cup \{x\})$ *est indécomposable*$\}$.

La classe formée par $Ext(X)$, $[X]$ *et* $X(u)$, *où* $u \in X$, *est noté par* p_X.

Lemme 4.1.1 ([13]). *Soient* $G := (S, A)$ *un graphe et* X *une partie de* S *tels que* $\mid X \mid \geq 3$ *et* $G(X)$ *est indécomposable. La classe* $p_X := \{X(u) : u \in X\} \cup \{Ext(X), [X]\}$ *forme une partition de* $S - X$. *De plus, les assertions suivantes sont vérifiées.*

- *Soient* $u \in X$, $x \in X(u)$ *et* $y \in S - (X \cup X(u))$. *Si* $G(X \cup \{x, y\})$ *est décomposable, alors* $\{u, x\}$ *est un intervalle de* $G(X \cup \{x, y\})$.
- *Soient* $x \in [X]$ *et* $y \in S - (X \cup [X])$. *Si* $G(X \cup \{x, y\})$ *est décomposable, alors* $X \cup \{y\}$ *est un intervalle de* $G(X \cup \{x, y\})$.
- *Soient* $x \neq y \in Ext(X)$. *Si* $G(X \cup \{x, y\})$ *est décomposable, alors* $\{x, y\}$ *est un intervalle de* $G(X \cup \{x, y\})$.

Le résultat suivant est une conséquence directe du lemme 4.1.1.

Corollaire 4.1.1 ([13]). *Soit $G := (S, A)$ un graphe indécomposable. Si X est une partie de S telle que $\mid X \mid \geq 3$, $\mid S - X \mid \geq 2$ et $G(X)$ est indécomposable, alors il existe deux sommets distincts x et y de $S - X$ tels que $G(X \cup \{x, y\})$ est indécomposable.*

Rappelons enfin le lemme suivant.

Lemme 4.1.2 ([20]). *Si $G := (S, A)$ un graphe indécomposable avec $\mid S \mid \geq 5$ et si $a \in S$, alors il existe une partie X de S telle que $\mid X \mid = 4$ ou 5, $a \in X$ et $G(X)$ est indécomposable.*

4.2 Graphe d'indécomposabilité

Nous rappelons qu'à chaque graphe (orienté) indécomposable $G := (S, A)$ est associé son graphe d'indécomposabilité $I(G)$ défini, en tant que graphe simple sur S comme suit. Pour tous $x \neq y \in S$, $\{x, y\}$ est une arête de $I(G)$ si $G - \{x, y\}$ est indécomposable. Notons que les graphes indécomposables G, $\overline{G}$ et $G^\star$ ont les mêmes sommets critiques et le même graphe d'indécomposabilité.

Nous rappelons le lemme suivant.

Lemme 4.2.1 ([10]). *Soient $G := (S, A)$ un graphe indécomposable d'ordre ≥ 5 et x un sommet critique de G. Alors $\mid V_{I(G)}(x) \mid \leq 2$ et on a :*

- *Si $V_{I(G)}(x) = \{y\}$, où $y \in S$, alors $S - \{x, y\}$ est un intervalle de $G - x$.*
- *Si $V_{I(G)}(x) = \{y, z\}$, où $y \neq z \in S$, alors $\{y, z\}$ est un intervalle de $G - x$.*

Nous introduisons le graphe R_{2n+1} défini sur $\mathbb{N}_{2n}$, où $n \geq 2$, comme suit : $(2\mathbb{N}_{n-1}+1) \longrightarrow 2n \longrightarrow 2\mathbb{N}_{n-1}$ et pour tous $x \neq y \in \mathbb{N}_{2n-1}$, (x, y) est un arc de R_{2n+1} si $x < y$ et si x est impair ou y est pair.

Remarque 4.2.1 ([10]). *Le graphe R_{2n+1}, où $n \geq 2$, est autodual et (-1)-critique en $2n$. De plus, $I(R_{2n+1}) - 2n = P_{2n}$ et $2n$ est un sommet isolé de $I(R_{2n+1})$.*

Lemme 4.2.2 ([10]). *Le graphe d'indécomposabilité d'un graphe G d'ordre ≥ 7 et (-1)-critique en a, admet une unique composante connexe $\mathcal{C}$ de cardinal ≥ 2. De plus, si a est un sommet isolé de $I(G)$, alors G est isomorphe à R_{2n+1} ou à $\overline{R_{2n+1}}$.*

Nous complétons ce lemme comme suit.

Corollaire 4.2.1. *Soit G un graphe d'ordre ≥ 7, (-1)-critique en a et tel que a n'est pas un sommet isolé de $I(G)$. Soit $\mathcal{C}$ la composante connexe non réduite à un singleton de $I(G)$ et soit X une partie de $S(G)$ telle que $G(X)$ est indécomposable. Si $\mathcal{C} \subseteq X$, alors $S(G) = X$.*

Preuve. En appliquant plusieurs fois le corollaire 4.1.1 à partir de $G(X)$, on obtient deux sommets, distincts ou non, $x, y \in S(G) - \mathcal{C}$ tels que $G - \{x, y\}$ est indécomposable. Si $x = y$, x est un sommet non critique de G, contradiction car a est l'unique sommet non critique de G. Si $x \neq y$, $\{x, y\}$ est une arête de $I(G)$, contradiction car x et y sont des sommets isolés de $I(G)$.

$\square$

Ces résultats nous amènent à associer à chaque graphe (-1)-critique G d'ordre ≥ 7, le sous-graphe $I'(G)$ de $I(G)$, induit par sa composante connexe non réduite à un singleton.

Proposition 4.2.1. *Étant donné un graphe G d'ordre ≥ 7 et (-1)-critique en a, l'une des assertions suivantes est vérifiée :*

- *$I(G)$ est un cycle de longueur impaire.*
- *$I'(G)$ est un chemin de longueur ≥ 2.*
- *$I'(G)$ est un arbre a-étoilé dont toutes les branches sont de longueurs ≥ 2 et admettant au plus une branche de longueur impaire.*

Preuve. Soit G un graphe d'ordre ≥ 7 et (-1)-critique en a. Si a est un sommet isolé de $I(G)$ alors, d'après le lemme 4.2.2, G est isomorphe à R_{2n+1} ou à $\overline{R_{2n+1}}$ et, d'après la remarque 4.2.1, $I'(G)$ est un chemin de longueur ≥ 5. Supposons maintenant que a est un sommet de $I'(G)$. Supposons d'abord que $I(G)$ abrite un cycle. Il existe alors une partie X de $S(G)$ telle que $I(G)(X)$ est un cycle. Posons $I(G)(X) := C_m$, où $m \geq 2$. Le sommet a appartient à X, sinon il existe un sommet $\alpha \in X$ tel $d_{I(G)}(\alpha) \geq 3$. Comme α est un sommet critique de G, ceci contredit le lemme 4.2.1. On peut alors supposer que $a = 0$. Comme d'après le lemme 4.2.1, $\{0, m-1\}$ est un intervalle de $G - m$, m est pair, autrement, encore par le lemme 4.2.1, $(m, 0) \equiv (m, 2) \equiv \cdots \equiv (m, m-1)$ de sorte que $\{0, m-1\}$ est un intervalle non trivial de G, contradiction. De plus, $S - X = \emptyset$, sinon, comme pour tout $\alpha \in S - X$, $(\alpha, 1) \equiv (\alpha, 3) \equiv \cdots \equiv (\alpha, m-1) \equiv (\alpha, 0) \equiv (\alpha, 2) \equiv \cdots \equiv (\alpha, m)$, alors X est un intervalle non trivial de G, contradiction. Il s'ensuit que $I(G)$ est un cycle de longueur impaire. Supposons à présent que $I(G)$ n'abrite pas un cycle, c'est-à-dire que $I'(G)$ est un arbre. Si $d_{I(G)}(a) \leq 2$ (resp. $d_{I(G)}(a) \geq 3$), alors, d'après le lemme 4.2.1, $I'(G)$ est un chemin (resp. un arbre étoilé de source a). Supposons d'abord que $I'(G)$ est un chemin. D'après le lemme 4.1.2, il existe une partie X de $S(G)$ telle que $\mid X \mid = 4$ ou 5, $a \in X$ et $G(X)$ est indécomposable. En appliquant plusieurs fois le corollaire 4.1.1 à partir de $G(X)$, on obtient deux sommets $x, y \in S(G)$ tels que $G - \{x, y\}$ est indécomposable. Puisque x est un sommet critique de G, alors $x \neq y$. Il s'ensuit que $\{x, y\}$ est une arête de $I'(G)$. Comme de plus a n'est pas un sommet isolé de $I(G)$, alors le chemin $I'(G)$ est de longueur ≥ 2. Nous posons maintenant, pour tous entiers h, $l \geq 1$, $S_{h_l} := \{h_0, \cdots, h_l\}$, $h_0 := a := 0$, et nous notons par P_{h_l} le chemin défini sur S_{h_l} par $A(P_{h_l}) := \{\{h_u, h_v\} :\mid u - v \mid = 1\}$. Supposons par l'absurde, que $I'(G)$ est un arbre étoilé admettant deux branches distinctes $P_{1_{2p+1}}$ et $P_{2_{2q+1}}$ de longueurs impaires, où p, $q \in \mathbb{N}$. Une suite d'applications du lemme 4.2.1 donne que $(0, 1_1) \equiv (0, 1_{2p+1}) \equiv (1_{2p}, 1_{2p+1}) \not\equiv (1_{2p}, 2_1) \equiv (0, 2_1)$. Soit $x \in S(G) - (S_{1_{2p+1}} \cup S_{2_{2q+1}})$. Encore par le lemme 4.2.1, $(0, x) \equiv (1_{2p}, x) \equiv (1_{2p}, 2_1) \equiv (0, 2_1)$. Ainsi $(0, x) \equiv (0, 2_1)$

. De même, $(0,x) \equiv (0,1_1)$. Contradiction car $(0,1_1) \not\equiv (0,2_1)$. Supposons que $I'(G)$ est un arbre 0-etoilé admettant une branche P_{1_1} de longueur 1. Considérons deux autres branches distinctes $P_{2_{2r}}$ et $P_{3_{2s}}$ de $I'(G)$, où $r,s \in \mathbb{N} - \{0\}$. D'après le lemme 4.2.1, $0 \sim (S - \{0,1_1\})$, et pour tous $x \in S - (\{1_1\} \cup S_{2_{2r}})$, $l \in \{1,\cdots,r\}$, on a $(2_{2l},x) \equiv (0,x) \equiv (0,3_{2s-1}) \equiv (2_{2r-1},3_{2s-1}) \equiv (2_{2r-1},x) \equiv (2_{2l-1},x)$. Il s'ensuit que $S_{2_{2r}} - \{0\}$ est un intervalle non trivial du graphe indécomposable $G - \{0,1_1\}$, contradiction. D'où, si elle existe, la branche de longueur impaire de $I'(G)$ est de longueur ≥ 3.

$\square$

4.3 Construction des graphes (-1)-critiques

La proposition ci-dessus nous amène à construire les graphes (-1)-critiques suivants les différents graphes d'indécomposabilité possibles pour de tels graphes.

4.3.1 Les graphes (-1)-critiques G tels que $I(G)$ est un cycle

Rappelons que pour tout $p \geq 1$, le graphe H_{2p+1} est défini sur $\mathbb{Z}/(2p+1)\mathbb{Z}$ comme suit : pour tous $x \neq y \in \mathbb{N}_{2p}$, (x,y) est un arc de H_{2p+1} si : ou bien $x < y$, x est pair et y est impair ; ou bien $x > y$ et x et y sont de même parité. Notons que H_{2p+1} est autodual en considérant la permutation $i \longmapsto -i$.

Proposition 4.3.1. *À des isomorphismes près, les graphes (-1)-critiques d'ordre* ≥ 7 *et dont le graphe d'indécomposabilité est un cycle sont* H_{2p+1} *et* $\overline{H_{2p+1}}$*, où* $p \geq 3$*. De plus,* 0 *est le sommet non critique de* H_{2p+1}*.*

Preuve. Nous commençons par établir que pour tout $p \geq 2$, H_{2p+1} est (-1)-critique en 0 et que $I(H_{2p+1}) = C_{2p+1}$. Montrons d'abord, par récurrence, que pour tout $p \geq 1$, H_{2p+1} est indécomposable. Il est clair que H_3 est indécomposable. Soit maintenant $p \geq 2$. Le graphe H_{2p-1} étant indécomposable par hypothèse de récurrence, on vérifie que H_{2p+1} est indécomposable en considérant la partition p_W, où $W := S(H_{2p-1})$. Il suffit de constater que $2p \in W(2p-2)$, $2p-1 \notin W(2p-2)$ et $(2p-1, 2p) \not\equiv (2p-1, 2p-2)$. Tout sommet $i \neq 0$ de H_{2p+1} est critique car $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle non trivial de $H_{2p+1} - i$. En remarquant que $H_{2p+1} - \{0, 1\} \simeq H_{2p-1}$, nous vérifions maintenant que $H_{2p+1} - 0$ est indécomposable en considérant la partition p_Y, où $Y := \{2, \cdots, 2p\}$. D'une part $1 \notin [Y]$ car $2 - -1$ et $3 \longrightarrow 1$. D'autre part, pour tout $u \in Y$, $1 \notin Y(u)$. En effet, $(2p-1, 1) \not\equiv (2p-1, u)$ si u est pair ; $2 \longrightarrow u$ et $2 - -1$ si u est impair. Il s'ensuit que $1 \in Ext(Y)$, c'est-à-dire 0 est un sommet non critique de H_{2p+1}. Pour vérifier que $I(H_{2p+1}) = C_{2p+1}$, il suffit, d'après la proposition 4.2.1, de vérifier que pour tout $i \in \mathbb{Z}/(2p+1)\mathbb{Z}$, $H_{2p+1} - \{i, i+1\}$ est indécomposable. Pour tout $i \in \mathbb{N}_{2p-1}$,

$H_{2p+1} - \{i, i+1\} \simeq H_{2p-1}$, en considérant l'application f de $\mathbb{Z}/(2p+1)\mathbb{Z} - \{i, i+1\}$ sur $\mathbb{Z}/(2p-1)\mathbb{Z}$ définie par $f(k) := k$ si $k < i$ et $f(k) := k-2$ si $k > i+1$. De plus, $H_{2p+1} - \{2p, 0\} \simeq H_{2p-1}$ en considérant l'application g de $\mathbb{Z}/(2p+1)\mathbb{Z} - \{2p, 0\}$ sur $\mathbb{Z}/(2p-1)\mathbb{Z}$ définie par $g(k) := k$. Comme H_{2p-1} est indécomposable, il s'ensuit que $I(H_{2p+1}) = C_{2p+1}$.

Soit maintenant un graphe (-1)-critique G d'ordre ≥ 7 et dont le graphe d'indécomposabilité est un cycle. D'après la proposition 4.2.1, le graphe G est de cardinal impair. On pose alors $S(G) := \mathbb{Z}/(2p+1)\mathbb{Z}$, où $p \geq 3$, 0 est le sommet non critique de G et $I(G) := C_{2p}$. Comme, d'aprés le lemme 4.2.1, pour tout $i \in \{1, \cdots, 2p\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$, alors $(0,1) \equiv (0,3) \equiv \cdots \equiv (0, 2p-1) \equiv (2, 2p-1) \equiv \cdots \equiv (2p-2, 2p-1) \equiv (2p-2, 0) \equiv (2p, 0)$. Il s'ensuit que $(0,1) \not\equiv (0, 2p)$, autrement $(0,1) \equiv (0,3) \equiv \cdots \equiv (0, 2p-1) \equiv (0, 2p) \equiv (0, 2p-2) \equiv \cdots \equiv (0,2)$, c'est-à-dire $\{1, \cdots, 2p\}$ est un intervalle non trivial de G, contradiction. Ainsi, $(0,1) \not\equiv (1,0)$ et quitte à remplacer G par $G^\star$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1$ et donc $2p \longrightarrow 0$. Pour $i \leq j \in \mathbb{N}_{p-1}$, $2i \longrightarrow 2j+1$ car $0 \longrightarrow 1$ et $(2i, 2j+1) \equiv \cdots \equiv (0, 2j+1) \equiv \cdots \equiv (0,1)$. Pour $i < j \in \mathbb{N}_p$, $2j \longrightarrow 2i$ car $2p \longrightarrow 0$ et $(2j, 2i) \equiv \cdots \equiv (2p, 2i) \equiv \cdots \equiv (2p, 0)$. Pour $i < j \in \mathbb{N}_{p-1}$, $2j+1 \longrightarrow 2i+1$ car $0 \longrightarrow 1$ et $(2j+1, 2i+1) \equiv \cdots \equiv (2p-1, 2i+1) \equiv \cdots \equiv (2p-1, 1) \equiv (0,1)$. Pour

$i < j \in \mathbb{N}_p$, $(2i+1, 2j) \equiv \cdots \equiv (1, 2j) \equiv \cdots \equiv (1,2)$. Or $(1,2) \equiv (2,1)$ sinon, comme $0 \longrightarrow 1$ et $\{0,2\}$ est un intervalle de $G-1$ et n'est pas un intervalle de G, alors $1 \longrightarrow 2$. Il s'ensuit que pour tout $i \in \{1, \cdots, p-1\}$, $2i+1 \longrightarrow \{1, 2p\} \longrightarrow 2i$, en particulier $\{1, 2p\}$ est un intervalle non trivial de $G - 0$. Contradiction. Ainsi, ou bien $1 - -2$ et dans ce cas $G = H_{2p+1}$, ou bien $1 \longleftrightarrow 2$ et dans ce cas $G = (\overline{H_{2p+1}})^\star \simeq \overline{H_{2p+1}}$.

□

4.3.2 Les graphes (-1)-critiques G tels que $I'(G)$ est un chemin

Nous construisons les graphes (-1)-critiques G de ce paragraphe sur $S(G) := \mathbb{N}_m$, $\mathbb{N}_m \cup \{\alpha\}$ ou $\mathbb{N}_m \cup \{\alpha, \beta\}$, où $\{\alpha, \beta\}$ est une paire d'éléments distincts tels que $\{\alpha, \beta\} \cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Le corollaire suivant découle directement de la remarque 4.2.1 et du lemme 4.2.2.

Corollaire 4.3.1. *À des isomorphismes près, Les graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en a et tels que $I'(G)$ est un chemin et a est un sommet isolé de $I(G)$, sont R_{2n+1} et $\overline{R_{2n+1}}$, où $n \geq 3$.*

Nous distinguons maintenant les cas où le sommet non critique est une extrémité ou un sommet interne de $I'(G)$.

Les graphes (-1)-critiques G en une extrémité de $I'(G)$

Nous introduisons, pour $m \geq 2$, la classe $\mathcal{F}_m$ des graphes G définis sur $\mathbb{N}_m$ et tels que $\mathbb{N}_m - \{0, 1\}$ est un intervalle de $G - 0$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, m-1\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$ sans être un intervalle de G. Notons d'abord la remarque suivante.

Remarque 4.3.1. *Soit un graphe $G \in \mathcal{F}_m$, où $m \geq 2$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_{m-1}$, $G - \{i, i+1\} \simeq G - \{m-1, m\}$. De plus, si $m \geq 3$, $G - m \in \mathcal{F}_{m-1}$.*

Nous caractérisons la classe $\mathcal{F}_m$ comme suit.

Lemme 4.3.1. *Étant donné un graphe G défini sur $\mathbb{N}_m$, où $m \geq 2$, $G \in \mathcal{F}_m$ si et seulement si $(0, 1) \not\equiv (2, 1)$ et pour tous $x < y \in \mathbb{N}_m$, $(x, y) \equiv (1, 2)$ si x est impair, $(x, y) \equiv (0, 2)$ si x et y sont pairs et $(x, y) \equiv (0, 1)$ si x est pair et y est impair.*

Preuve. Soit $G \in \mathcal{F}_m$, où $m \geq 2$. $(0, 1) \not\equiv (2, 1)$ car $\{0, 2\}$ est un intervalle de $G - 1$ et n'est pas un intervalle de G. Soit $x < y \in \mathbb{N}_m$. Pour $y \neq 1$, $(1, y) \equiv (1, 2)$ car $\mathbb{N}_m - \{0, 1\}$ est un intervalle de $G - 0$. Comme de plus pour tout $i \in \{1, \cdots, m-1\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$, alors $(1, 2) \equiv (1, y) \equiv \cdots \equiv (x, y)$ si x est impair ; $(0, 1) \equiv \cdots \equiv (0, y) \equiv \cdots \equiv (x, y)$ si x est pair et y est impair et $(0, 2) \equiv \cdots \equiv (0, y) \equiv \cdots \equiv (x, y)$ si x et y sont pairs.

Réciproquement, soit $i \in \{1, \cdots, m-1\}$. Remarquons que pour $x \in \mathbb{N}_m - \{i-1, i, i+1\}$, $(x, i-1) \equiv (x, i+1)$, de sorte que $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de

$G - i$. Si i est pair (resp. impair), alors $(i-1, i) \equiv (1, 2)$ et $(i+1, i) \equiv (1, 0)$ (resp. $(i-1, i) \equiv (0, 1)$ et $(i+1, i) \equiv (2, 1)$). Puisque $(0, 1) \not\equiv (2, 1)$, $(i, i-1) \not\equiv (i, i+1)$ et par suite $\{i-1, i+1\}$ n'est pas un intervalle de G. Enfin, $\mathbb{N}_m - \{0, 1\}$ est un intervalle de $G - 0$ car pour tout $y \in \mathbb{N}_m - \{0, 1\}$, $(1, y) \equiv (1, 2)$.

□

Nous complétons par la caractérisation suivante des graphes indécomposables de $\mathcal{F}_m$.

Lemme 4.3.2. *Soit $G \in \mathcal{F}_m$, où $m \geq 2$. Le graphe G est indécomposable si et seulement si ou bien m est pair et $(0, 1) \not\equiv (0, 2) \not\equiv (1, 2)$, ou bien m est impair et $(0, 2) \not\equiv (0, 1) \not\equiv (1, 2)$.*

Preuve. Soit un graphe $G \in \mathcal{F}_m$. On suppose que $(0, 1) \not\equiv (0, 2) \not\equiv (1, 2)$ lorsque m est pair, et que $(0, 2) \not\equiv (0, 1) \not\equiv (1, 2)$ lorsque m est impair. Montrons, par récurrence sur m, que G est indécomposable. En utilisant le lemme 4.3.1, on vérifie que G est indécomposable pour $m = 2$ et pour $m = 3$. Soit $m \geq 4$. D'après la remarque 4.3.1, $G(\mathbb{N}_{m-2}) \in \mathcal{F}_{m-2}$. Il s'ensuit que $G(\mathbb{N}_{m-2})$ est indécomposable par hypothèse de récurrence. Comme $m \in \mathbb{N}_{m-2}(m-2)$, $m-1 \notin \mathbb{N}_{m-2}(m-2)$ et $(m-1, m-2) \not\equiv (m-1, m)$, alors G est indécomposable d'après le lemme 4.1.1. Réciproquement, si m est pair et si $(0, 2) \equiv (0, 1)$ ou $(0, 2) \equiv (1, 2)$ (resp. si m est impair et si $(0, 1) \equiv (0, 2)$

ou $(0,1) \equiv (1,2)$), on vérifie que $\{1,2,\cdots,m\}$ ou $\mathbb{N}_{m-1}$ est un intervalle non trivial de G.

$\square$

Afin de caractériser les graphes (-1)-critiques de ce paragraphe, nous introduisons la classe $\mathcal{F}$ des graphes $G := (S,A)$ tels que $S := \mathbb{N}_m$, $\mathbb{N}_m \cup \{\alpha\}$ ou $\mathbb{N}_m \cup \{\alpha,\beta\}$, où $m \geq 2$; $G(\mathbb{N}_m) \in \mathcal{F}_m$; $(0,1) \equiv (0,2)$ si et seulement si $S - \mathbb{N}_m \neq \emptyset$; pour tous $i \in \mathbb{N}_m$ et $\gamma \in S - \mathbb{N}_m$, $(i,\gamma) \equiv (1,2)$ si i est impair et $(i,\gamma) \equiv (0,\gamma)$ si i est pair ; et tels que :

- Si $S = \mathbb{N}_m$, alors $(0,2) \not\equiv (1,2) \not\equiv (0,1)$.
- Si $S - \mathbb{N}_m = \{\alpha\}$, alors $(0,\alpha) \equiv (\alpha,0)$ si $(0,1) \equiv (1,2)$; $(0,\alpha) \not\equiv (0,1)$ et $(0,\alpha) \not\equiv (1,2)$ si $(0,1) \not\equiv (1,2)$.
- Si $S - \mathbb{N}_m = \{\alpha,\beta\}$, alors $(\beta,\alpha) \not\equiv (1,2) \not\equiv (0,1)$, $(0,\alpha) \equiv (1,2)$ et $(0,\beta) \equiv (0,1)$.

Lemme 4.3.3. *Étant donné un graphe G d'ordre ≥ 4 de la classe $\mathcal{F}$, G est (-1)-critique en m. De plus, si le graphe G est d'ordre ≥ 7, alors $I'(G) = P_{m+1}$.*

Preuve. Soit $G := (S,A)$ un graphe de la classe $\mathcal{F}$. Supposons d'abord que $S = \mathbb{N}_m$. Dans ce cas, $m \geq 3$ et, d'après la remarque 4.3.1, $G(\mathbb{N}_{m-1}) \in \mathcal{F}_{m-1}$. En utilisant le lemme 4.3.2, les graphes G et $G - m$ sont indécomposables. Par définition de $\mathcal{F}_m$, pour tout $i \in \mathbb{N}_{m-1}$, i est un sommet critique de G. Il s'ensuit que G est (-1)-critique en m. Lorsque $\mid S \mid \geq 7$, le graphe $G - \{m-1, m\}$ est indécomposable et pour tout $i \in \mathbb{N}_{m-2}$, i est un sommet critique de $G - m$. Il s'ensuit que $V_{I(G)}(m) = \{m-1\}$ et que, par la proposition 4.2.1, $I'(G)$ est un chemin. De plus, par la remarque 4.3.1, pour tout $i \in \mathbb{N}_{m-1}$, $G - \{i, i+1\} \simeq G - \{m-1, m\}$, en particulier, le graphe $G - \{i, i+1\}$ est indécomposable. On conclut que $I'(G) = I(G) = P_{m+1}$. Supposons maintenant que $S - \mathbb{N}_m \neq \emptyset$. On vérifie que $G(S - \{2, \cdots, m\})$ est indécomposable. Soit $i \in \{2, \cdots, m\}$. On pose $S_i := S - \{i, \cdots, m\}$. Montrons que si le graphe $G(S_i)$ est indécomposable, il en est de même pour le graphe $G(S_i \cup \{i\})$. On a $(i, 1) \equiv (2, 1)$ et $(i, 0) \equiv (1, 0)$. Si i est impair, alors, pour $\gamma \in S - \mathbb{N}_m$, $(i, \gamma) \equiv (1, 2) \not\equiv (i, 0)$. Si i est pair et $(i, 0) \equiv (i, 1)$, alors $S - \mathbb{N}_m = \{\alpha\}$ et $(\alpha, 0) \equiv (0, \alpha) \equiv (i, \alpha) \not\equiv (i, 0)$. Ainsi $i \notin [S_i]$. De plus, $i \notin S_i(0)$ car $(1, 0) \not\equiv (1, i)$, et pour $j \in \{1, \cdots, i-1\}$, $i \notin S_i(j)$ sinon $G((S_i - \{j\}) \cup \{i\})$ est indécomposable. Contradiction car $\{j-1, j+1\}$ est un intervalle de $G - j$. Comme $0 \sim \{1, \cdots, m\}$, il existe $\gamma \in S - \mathbb{N}_m$ tel que $(i, 0) \not\equiv (\gamma, 0)$. Si $S - \mathbb{N}_m = \{\alpha\}$, $(i, 0) \not\equiv (\alpha, 0)$ et donc $i \notin S_i(\alpha)$. Si $S - \mathbb{N}_m = \{\alpha, \beta\}$, alors $i \notin S_i(\alpha)$ car $(0, \alpha) \equiv (1, 2) \not\equiv (0, 1) \equiv (0, i)$. De plus, $(\beta, \alpha) \not\equiv (1, 2) \equiv (0, \alpha) \equiv (i, \alpha)$, donc $i \notin S_i(\beta)$. Nous concluons par le lemme 4.1.1, que $i \in Ext(S_i)$. Il s'ensuit que les graphes G et $G - m$ sont indécomposables. Pour tout $i \in \{1, \cdots, m-1\}$, i est un sommet critique de G car $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle non trivial de $G - i$. De même

0 et α sont des sommets critiques de G car $S-\{0,1\}$ et $S-\{0,\alpha\}$ sont des intervalles non triviaux respectifs de $G-0$ et de $G-\alpha$. Dans le cas où $\mid S-\mathbb{N}_m \mid= 2$, $\mathbb{N}_m$ est un intervalle non trivial de $G-\beta$. Le graphe G est alors (-1)-critique en m. De même, $G-\{m-1,m\}$ est indécomposable et les sommets de $G-\{m-1,m\}$ sont des sommets critiques de $G-m$ lorsque $m \geq 3$. Il s'ensuit, d'après la proposition 4.2.1, que $I'(G)$ est un chemin lorsque $\mid S \mid\geq 7$. Remarquons que pour tout $i \in \mathbb{N}_{m-2}$, $G-\{i,i+1\} \simeq G-\{m-1,m\}$, en particulier $G-\{i,i+1\}$ est indécomposable. De plus, α est un sommet isolé de $I(G)$. Il en est de même pour le sommet β lorsque $\mid S-\mathbb{N}_m \mid= 2$. On conclut que $I'(G) = P_{m+1}$ lorsque $\mid S \mid\geq 7$.

$\square$

Proposition 4.3.2. *À des isomorphismes près, les graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en m et tels que $I'(G) = P_{m+1}$, sont les graphes d'ordre ≥ 7 de la classe $\mathcal{F}$.*

Preuve. Soit $G := (S,A)$ un graphe d'ordre ≥ 7, (-1)-critique en m et tel que $I'(G) = P_{m+1}$. D'après la proposition 4.2.1, $m \geq 2$. D'après le lemme 4.2.1, pour tout $i \in \{1,\cdots,m-1\}$, $\{i-1,i+1\}$ est un intervalle de $G-i$ et donc un intervalle de $G(\mathbb{N}_m)-i$. De plus, $\{i-1,i+1\}$ n'est pas un intervalle de G. Il s'ensuit que $(i,i+1) \not\equiv (i,i-1)$, en particulier, $\{i-1,i+1\}$ n'est pas un intervalle de $G(\mathbb{N}_m)$.

D'après le lemme 4.2.1, $S-\{0,1\}$ est un intervalle de $G-0$, en particulier, $\mathbb{N}_m-\{0,1\}$ est un intervalle de $G(\mathbb{N}_m)-0$. On conclut que $G(\mathbb{N}_m)\in\mathcal{F}_m$. Si $S-\mathbb{N}_m\neq\emptyset$, alors, encore par le lemme 4.2.1, pour tous $\gamma\in S-\mathbb{N}_m$ et $i\in\mathbb{N}_m$, $(i,\gamma)\equiv(0,\gamma)$ si i est pair et $(i,\gamma)\equiv(1,2)$ si i est impair.

Nous montrons maintenant que $(0,1)\equiv(0,2)$ si et seulement si $S-\mathbb{N}_m\neq\emptyset$. Si $(0,1)\equiv(0,2)$, alors $S-\mathbb{N}_m\neq\emptyset$ sinon $\{1,\cdots,m\}$ est un intervalle non trivial de G, contradiction. Supposons que $(0,1)\not\equiv(0,2)$. Il suffit de montrer que $(1,2)\not\equiv(0,1)$ si m est impair et $(1,2)\not\equiv(0,2)$ si m est pair. En effet, dans ce cas, $G(\mathbb{N}_m)$ est indécomposable d'après le lemme 4.3.2. Il s'ensuit que $S=\mathbb{N}_m$ d'après le corollaire 4.2.1. Supposons d'abord que $(0,1)\equiv(1,2)$ et m est impair. Encore d'après le lemme 4.3.2 et la remarque 4.3.1, $G(\mathbb{N}_m)$ est décomposable et $G(\mathbb{N}_{m-1})$ est indécomposable. Il existe alors $\mu\in S-\mathbb{N}_m$ tel que $(0,\mu)\not\equiv(1,2)$. En utilisant le lemme 4.1.1, $G(\mathbb{N}_m\cup\{\mu\})$ est indécomposable car $m\in[\mathbb{N}_{m-1}]$, $\mu\not\in[\mathbb{N}_{m-1}]$ et $(m,\mu)\not\equiv(m,m-1)$. D'après le corollaire 4.2.1, $G=G(\mathbb{N}_m\cup\{\mu\})$. Ainsi, $G-\{\mu,m\}$ est indécomposable, contradiction car μ est un sommet isolé de $I(G)$. Supposons maintenant que $(0,2)\equiv(1,2)$ et m est pair. D'après le lemme 4.3.2, $G(\mathbb{N}_m)$ est décomposable. Ainsi $S-\mathbb{N}_m\neq\emptyset$. De plus, d'après le lemme 4.3.2 et la remarque 4.3.1, $G(\mathbb{N}_{m-1})$ est indécomposable pour $m\geq 4$. Supposons qu'il existe un sommet $\gamma\in S-\mathbb{N}_m$ tel que $(2,1)\not\equiv(0,\gamma)\not\equiv(1,2)$. Comme

$G(\{0, 1, 2, \gamma\})$ est indécomposable, alors, d'après le corollaire 4.2.1, $m \geq 4$. On obtient $G(\mathbb{N}_m \cup \{\gamma\})$ est indécomposable car $m \in [\mathbb{N}_{m-1}]$, $\gamma \notin [\mathbb{N}_{m-1}]$ et $(m, \gamma) \not\equiv (m, m-1)$. D'après le corollaire 4.2.1, (γ, m) est un arc de $I(G)$, contradiction. Il s'ensuit que $(1, 2) \not\equiv (2, 1)$ et que $S - \mathbb{N}_m = E_1 \cup E_2$, où $E_1 := \{x \in S - \mathbb{N}_m : (0, x) \equiv (1, 2)\}$ et $E_2 := \{x \in S - \mathbb{N}_m : (0, x) \equiv (2, 1)\}$. Notons que $E_1 \neq \emptyset$ (resp. $E_2 \neq \emptyset$), sinon $S - \{m\}$ (resp. $\mathbb{N}_m$) est un intervalle non trivial de G. Comme $E_2 \cup \mathbb{N}_m$ n'est pas un intervalle de G, il existe $(e_1, e_2) \in E_1 \times E_2$, tel que $(e_2, e_1) \not\equiv (1, 2)$. On vérifie que $G(\{0, 1, e_2\})$ est indécomposable. En utilisant le lemme 4.1.1, $G(\{0, 1, 2, e_1, e_2\})$ est indécomposable car $2 \in [\{0, 1, e_2\}]$, $e_1 \notin [\{0, 1, e_2\}]$ et $(e_1, 2) \not\equiv (e_2, 2)$. Ainsi, par le corollaire 4.2.1, on obtient $m \geq 4$. Posons $X := \mathbb{N}_{m-1} \cup \{e_1, e_2\}$, nous montrons que $G(X)$ est indécomposable. On vérifie que $e_2 \in Ext(\mathbb{N}_{m-1})$. En effet, $e_2 \notin [\mathbb{N}_{m-1}]$ car $(0, e_2) \equiv (2, 1) \not\equiv (1, 2) \equiv (1, e_2)$. De plus, pour tout $i \in \mathbb{N}_{\frac{m}{2}-1}$, $e_2 \notin \mathbb{N}_{m-1}(2i)$ car $(e_2, m-1) \equiv (2, 1) \not\equiv (0, 1) \equiv (2i, m-1)$, et $e_2 \notin X(2i+1)$ car $(e_2, 0) \equiv (1, 2) \not\equiv (1, 0) \equiv (2i+1, 0)$. Comme de plus, $e_1 \in [\mathbb{N}_{m-1}]$ et $(e_2, e_1) \not\equiv (1, 2) \equiv (1, e_1)$, alors $G(X)$ est indécomposable. On a $m \in Ext(X)$. En effet, d'une part $m \notin [X]$ car $(1, m) \not\equiv (e_1, m)$. D'autre part, pour tout $i \in N_{\frac{m}{2}-1}$, $m \notin X(2i)$ car $(2i, m-1) \equiv (0, 1) \not\equiv (2, 1) \equiv (m, m-1)$, et $m \notin X(2i+1)$ car $(2i+1, e_2) \equiv (1, 2) \not\equiv (2, 1) \equiv (m, e_2)$. De plus $m \notin X(e_1) \cup X(e_2)$ car $(e_2, m) \equiv (m, e_1) \equiv (1, 2) \not\equiv (e_2, e_1)$. Ainsi $G(\mathbb{N}_m \cup$

$\{e_1, e_2\}$) est indécomposable et, d'après le corollaire 4.2.1, $G = G(\mathbb{N}_m \cup \{e_1, e_2\})$. Il s'ensuit que $G - \{m, e_1\}$ est indécomposable, contradiction car e_1 est un sommet isolé de $I(G)$.

Si $S = \mathbb{N}_m$, alors $G \in \mathcal{F}_m$ et $G - m \in \mathcal{F}_{m-1}$ et, d'après le lemme 4.3.2, $(0, 2) \not\equiv (1, 2) \not\equiv (0, 1)$. Il s'ensuit que $G \in \mathcal{F}$. Supposons alors que $S - \mathbb{N}_m \neq \emptyset$. Dans ce cas $(0, 1) \equiv (0, 2)$. Supposons d'abord que $(0, 1) \not\equiv (1, 2)$. S'il existe $\omega \in S - \mathbb{N}_m$ tel que $(0, \omega) \not\equiv (0, 1)$ et $(0, \omega) \not\equiv (1, 2)$, alors, $G(\mathbb{N}_m \cup \{\omega\})$ est isomorphe à un graphe de la classe $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que $G(\mathbb{N}_m \cup \{\omega\})$ est (-1)-critique et que, d'après le corollaire 4.2.1, $G = G(\mathbb{N}_m \cup \{\omega\})$. Sinon, $S - \mathbb{N}_m = E_1 \cup E_3$ où $E_3 := \{x \in S - \mathbb{N}_m : (0, x) \equiv (0, 1)\}$. Remarquons que $E_1 \neq \emptyset$ (resp. $E_3 \neq \emptyset$), sinon $(E_3 \cup \mathbb{N}_m) - \{0\}$ (resp. $\mathbb{N}_m$) est un intervalle non trivial de G, contradiction. Comme $E_3 \cup \mathbb{N}_m$ n'est pas un intervalle de G, il existe $(e_1, e_3) \in E_1 \times E_3$, tel que $(e_3, e_1) \not\equiv (1, 2)$. Ainsi, $G(\mathbb{N}_m \cup \{e_1, e_3\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que $G(\mathbb{N}_m \cup \{e_1, e_3\})$ est (-1)-critique et que, d'après le corollaire 4.2.1, $G = G(\mathbb{N}_m \cup \{e_1, e_3\})$. Supposons enfin que $(0, 1) \equiv (1, 2)$. Daprès le lemme 4.3.1, d'une part $(0, 1) \not\equiv (1, 0)$ et d'autre part, pour tous $x < y \in \mathbb{N}_m$, $(x, y) \equiv (0, 1)$. Il s'ensuit que $G(\mathbb{N}_m) = O_m$ ou $O_m^\star$. Remarquons que si $G \in \mathcal{F}$, alors $G^\star \in \mathcal{F}$. On peut alors supposer que $G(\mathbb{N}_m) = O_m$. Il suffit de montrer qu'il existe un sommet $\nu \in S - \mathbb{N}_m$, tel que $(0, \nu) \not\equiv (1, 2)$ et

$(0, \nu) \not\equiv (2, 1)$. En effet, dans ce cas, $(0, \nu) \equiv (\nu, 0)$ et par suite, $G(\mathbb{N}_m \cup \{\nu\})$ est isomorphe à un graphe de la classe $\mathcal{F}$. Il s'ensuit que $G(\mathbb{N}_m \cup \{\nu\})$ est (-1)-critique et que, d'après le corollaire 4.2.1, $G = G(\mathbb{N}_m \cup \{\nu\})$. Suppposons alors, par l'absurde, que $S - \mathbb{N}_m = E_1 \cup E_2$. Remarquons que $E_1 \neq \emptyset$ sinon, $E_2 \cup \mathbb{N}_{m-2}$ est un intervalle non trivial de $G - m$ si m est impair, $E_2 \cup \mathbb{N}_{m-1}$ est un intervalle non trivial de G si m est pair. Contradiction car G et $G - m$ sont indécomposables. De même $E_2 \neq \emptyset$, sinon $\mathbb{N}_m$ est un intervalle non trivial de G, contradiction. L'entier m est pair, autrement, pour $y \in E_2$, $G(\mathbb{N}_m \cup \{y\}) \simeq V_{m+2}$. D'après le corollaire 4.2.1, $G = G(\mathbb{N}_m \cup \{y\}) \simeq V_{m+2}$, contradiction car V_{m+2} est un tournoi critique. Comme $\mathbb{N}_m \longrightarrow E_1$ et $E_2 \cup \mathbb{N}_m$ n'est pas un intervalle de G, il existe $(b_1, b_2) \in E_1 \times E_2$, tel que $(b_2, b_1) \not\equiv (1, 2)$. En remarquant que $G(\mathbb{N}_{m-1} \cup \{b_2\}) \simeq V_{m+1}$, on vérifie que $G(\mathbb{N}_m \cup \{b_1, b_2\})$ est indécomposable en considérant la partition $p_{\mathbb{N}_{m-1} \cup \{b_2\}}$. Il suffit de remarquer que $\mathbb{N}_{m-1} \cup \{b_2\} \longrightarrow m \longrightarrow b_1$ et que $b_1 \notin [\mathbb{N}_{m-1} \cup \{b_2\}]$. Il s'ensuit, d'après de corollaire 4.2.1, que $G = G(\mathbb{N}_m \cup \{b_1, b_2\})$. Ainsi $G - \{m, b_1\}$ est indécomposable, contradiction car b_1 est un sommet isolé de $I(G)$.

$\square$

Les graphes (-1)-critiques G en un sommet interne de $I'(G)$

Nous introduisons, pour $m \geq 2$ et $a \in \{1, \cdots, m-1\}$, la classe $\mathcal{G}_m(a)$ des graphes G définis sur $\mathbb{N}_m$ tels que $\mathbb{N}_m - \{0,1\}$ et $\mathbb{N}_{m-2}$ sont des intervalles respectifs de $G-0$ et de $G-m$; $\mathbb{N}_m - \{1\}$ et $\mathbb{N}_m - \{m-1\}$ ne sont pas des intervalles de G et pour tout $i \in \{1, \cdots, m-1\} - \{a\}$, $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$.

Notons d'abord les remarques suivantes.

Remarque 4.3.2. *Étant donné un graphe $G \in \mathcal{G}_m(a)$, la permutation $i \longmapsto m - i$ est un isomorphisme de G sur un graphe de $\mathcal{G}_m(m-a)$.*

Remarque 4.3.3. *Soit $G \in \mathcal{G}_m(a)$. $G - \{i, i+1\} \simeq G - \{0,1\}$ ou $G(\mathbb{N}_{m-2})$ suivant que $0 \leq i \leq a-1$ ou que $a \leq i \leq m-1$ respectivement. Lorsque $m \geq 4$, $G(\mathbb{N}_{m-2}) \in \mathcal{F}_{m-2}$ ou $\mathcal{G}_{m-2}(a)$ suivant que $a \geq m-2$ ou que $a < m-2$ respectivement ; l'application $i \mapsto m-i$ est un isomorphisme de $G - \{0,1\}$ sur un graphe de $\mathcal{F}_{m-2}$ ou de $\mathcal{G}_{m-2}(m-a)$ suivant que $a \leq 2$ ou que $a > 2$ respectivement. De plus, si $G - \{0,1\}$ (resp. $G(\mathbb{N}_{m-2})$) est indécomposable, G est indécomposable si et seulement si $0 \notin [\{2, \cdots, m\}]$ (resp. $m \notin [\mathbb{N}_{m-2}]$).*

Lemme 4.3.4. *Soit G est un graphe d'ordre ≥ 7, (-1)-critique en $a \in \{1, \cdots, m-1\}$ et tel que $I'(G) = P_{m+1}$. Alors, $G(\mathbb{N}_m) \in \mathcal{G}_m(a)$.*

Preuve. On pose $G' := G(\mathbb{N}_m)$. D'après le lemme 4.2.1, pour tout $i \in \{1, \cdots, m-1\} - \{a\}$, on a $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$ et donc de $G' - i$. De plus, $\mathbb{N}_m - \{0,1\}$ et $\mathbb{N}_{m-2}$ sont des intervalles respectifs de $G-0$ et de $G-m$. En particulier, il s'agit d'intervalles respectifs de $G' - 0$ et de $G' - m$. Il s'ensuit que $(1,0) \not\equiv (1,2)$ et que $(m-1, m-2) \not\equiv (m-1, m)$, de sorte que $\mathbb{N}_m - \{1\}$ et $\mathbb{N}_m - \{m-1\}$ ne sont pas des intervalles de G'. Ainsi, $G' \in \mathcal{G}_m(a)$.

$\square$

Nous introduisons les classes Ω_1, Ω_2 et Ω_3 de graphes définies comme suit.

- Ω_1 est la classe des graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en $2k+1$, tels que $I'(G) = P_{2n+1}$, où $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}_{n-1}$.
- Ω_2 est la classe des graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en $2k+1$, tels que $I'(G) = P_{2n+2}$, où $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}_{n-1}$.
- Ω_3 est la classe des graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en $2k$, tels que $I'(G) = P_{2n+1}$, où $n \geq 2$ et $k \in \{1, \cdots, n-1\}$.

Soit G un graphe d'ordre ≥ 7, (-1)-critique en $2k$ et tel que $I'(G) = P_{2n+2}$, où $n \geq 1$ et $k \in \{1, \cdots, n\}$. La permutation σ de $S(G)$ qui fixe les sommets de $S(G) - \mathbb{N}_{2n+1}$ et telle que $\sigma(i) := 2n+1-i$ pour $i \in \mathbb{N}_{2n+1}$, est un isomorphisme de G sur un graphe de la classe Ω_2. Nous en déduisons la remarque suivante.

Remarque 4.3.4. *À des isomorphismes près, les graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en a et tels que $I'(G)$ est un chemin dont a est un sommet interne, sont les graphes de la classe $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.*

La classe Ω_1

Lemme 4.3.5. *Soit un graphe G défini sur $\mathbb{N}_{2n}$, où $n \geq 1$. $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$, où $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, si et seulement si $(0,1) \not\equiv (2,1)$ et pour tous $x < y \in \mathbb{N}_{2n}$ on a : si x et y ne sont pas tous deux pairs, alors $(x,y) \equiv (1,2)$; si x et y sont pairs, alors $(x,y) \equiv (0,2)$, $(2n-2, 2n)$ ou $(2k, 2k+2)$, suivant que $y \leq 2k$, $x \geq 2k+2$ ou que $x \leq 2k < y$ respectivement.*

Preuve. Soient $n \geq 1$, $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ et supposons que $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$. On a $(0,1) \not\equiv (2,1)$ car $\mathbb{N}_{2n} - \{1\}$ n'est pas un intervalle de G et $\mathbb{N}_{2n} - \{0,1\}$ est un intervalle de $G - 0$. Soient $x < y \in \mathbb{N}_{2n}$. Si x et y sont pairs, comme pour tout $l \in \{1, \cdots, 2n-1\} - \{2k+1\}$, $\{l-1, l+1\}$ est un intervalle de de $G-l$, alors $(x,y) \equiv (0,2)$, $(2n-2, 2n)$ ou $(2k, 2k+2)$, suivant que $y \leq 2k$, $x \geq 2k+2$ ou que $x \leq 2k < y$ respectivement. Sinon, comme $\mathbb{N}_{2n} - \{0,1\}$ et $\mathbb{N}_{2n-2}$ sont des intervalles respectifs de $G - 0$ et de $G - 2n$, alors $(x,y) \equiv (1,y) \equiv (1,2)$ si x est impair ; $(x,y) \equiv (x, 2n-1) \equiv (1, 2n-1) \equiv (1,2)$ si y est impair.

Réciproquement, comme pour tout $i \in \mathbb{N}_{2n} - \{0,1\}$ (resp. $i \in \mathbb{N}_{2n-2}$), $(1,i) \equiv (1,2)$ (resp. $(i, 2n-1) \equiv (1,2)$) alors $\mathbb{N}_{2n} - \{0,1\}$ et $\mathbb{N}_{2n-2}$ sont des intervalles respectifs de $G - 0$ et de $G - 2n$. Comme $(1,2) \equiv (0,1) \not\equiv (2,1)$, alors quitte à remplacer G par $G^\star$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2$ et donc $\mathbb{N}_{2n-2} \longrightarrow 2n-1 \longrightarrow 2n$. En particulier, $\mathbb{N}_{2n} - \{1\}$ et $\mathbb{N}_{2n} - \{2n-1\}$ ne sont pas des intervalles de G. Soit

$i \in \{1, \cdots, 2n-1\} - \{2k+1\}$. Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{N}_{2n} - \{i-1, i, i+1\}$, $(x, i-1) \equiv (x, i+1)$, de sorte que $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$.

□

Lemme 4.3.6. *Soient* $n \geq 1$, $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ *et* $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$. *Le graphe* G *est indécomposable si et seulement si* $(2k, 2k+2) \not\equiv (1, 2)$.

Preuve. Comme d'après le lemme 4.3.5, $(1, 2) \not\equiv (2, 1)$, quitte à remplacer G par $G^\star$, on peut supposer que $1 \longrightarrow 2$. Si $(2k, 2k+2) \equiv (1, 2)$, alors, encore par le lemme 4.3.5, on a $\mathbb{N}_{2k} \longrightarrow \{2k+1, \cdots, 2n\}$ et donc G est décomposable. Supposons que $(2k, 2k+2) \not\equiv (1, 2)$. Pour $n = 1$, $G \in \mathcal{G}_2(1)$ et $(0, 2) \not\equiv (1, 2) \not\equiv (1, 0) \not\equiv (2, 0)$, donc G est indécomposable. Soit $n > 1$. Par la remarque 4.3.3 et par hypothèse de récurrence, $G - \{2n-1, 2n\}$ ou $G - \{0, 1\}$ est indécomposable. De plus, $2n \notin [\mathbb{N}_{2n-2}]$ et $0 \notin [\{2, \cdots, 2n\}]$. Il s'ensuit que G est indécomposable d'après la remarque 4.3.3.

□

Nous introduisons la classe $\mathcal{G}$ des graphes $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$, où $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, tels que $(2k, 2k+2) \not\equiv (1, 2)$; $(2n-2, 2n) \not\equiv (0, 2)$ si $(2k, 2k+2) \equiv (0, 2)$; $(2n-2, 2n) \not\equiv (1, 2)$ si $k = 0$ et $(0, 2) \not\equiv (1, 2)$ si $k = n-1$.

Nous complétons la remarque 4.3.2 comme suit.

Remarque 4.3.5. *Étant donné un graphe $G \in \mathcal{G}$, l'application $\phi : x \longmapsto 2n - x$ est un isomorphisme de G sur un graphe de $\mathcal{G}$.*

Lemme 4.3.7. *Les graphes d'ordre ≥ 7 de la classe $\mathcal{G}$ sont des graphes de la classe Ω_1.*

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe d'ordre ≥ 7 de la classe $\mathcal{G}$. Il existe $n \geq 3$ et $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, tels que $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$. Comme $(2k, 2k+2) \not\equiv (1, 2)$, d'après le lemme 4.3.6, G est indécomposable. D'après la remarque 4.3.3, pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $G - \{i, i+1\} \simeq G - \{0, 1\}$ ou $G - \{2n-1, 2n\}$. Pour tout $x \in S - \{1, 2n-1\}$, les graphes $G - \{x, 0\}$ et $G - \{x, 2n\}$ sont décomposables. Il suffit de montrer que $G - \{0, 1\}$ et $G - \{2n-1, 2n\}$ sont indécomposables. En effet, dans ce cas, par construction de $\mathcal{G}$, tous les sommets de $G - \{2k+1\}$ sont des sommets critiques de G. Il s'ensuit, en utilisant ce qui précède, que $I(G) = P_{2n+1}$ d'après le lemme 4.2.1. De plus, $\{2k, 2k+2\}$ n'est pas un intervalle de $G - \{2k+1\}$. En effet, si $(2k, 2k+2) \not\equiv (0, 2)$, alors $(0, 2k) \equiv (0, 2) \not\equiv (2k, 2k+2) \equiv (0, 2k+2)$. Si $(2k, 2k+2) \equiv (0, 2)$, alors $(2n, 2k) \equiv (2k+2, 2k) \equiv (2, 0) \not\equiv (2n, 2n-2) \equiv (2n, 2k+2)$. D'après le lemme 4.2.1, $2k+1$ est un sommet non critique de G, et donc G est (-1)-critique en $2k+1$. Montrons pour finir, que $G - \{2n-1, 2n\}$ et $G - \{0, 1\}$ sont indécomposables. D'après la remarque 4.3.3, $G - \{2n-1, 2n\} \in \mathcal{G}_{2n-2}(2k+1)$ ou $\mathcal{F}_{2n-2}$ suivant que $k < n-1$

ou que $k = n-1$ respectivement. D'une part $(2k, 2k+2) \not\equiv (1,2)$, d'autre part $(0,1) \not\equiv (0,2) \not\equiv (1,2)$ lorsque $k = n-1$. Il s'ensuit, en utilisant les lemmes 4.3.6 et 4.3.2, que $G - \{2n-1, 2n\}$ est indécomposable. D'après la remarque 4.3.5, il existe un isomorphisme ϕ de G sur un graphe H de $\mathcal{G}$, avec $\phi(0) = 2n$ et $\phi(1) = 2n-1$. La restriction de ϕ à $S - \{0,1\}$ est un isomorphisme de $G - \{0,1\}$ sur $H - \{2n-1, 2n\}$. Le graphe $H - \{2n-1, n\}$ étant indécomposable d'après ce qui précède, il en est de même pour $G - \{0,1\}$.

$\square$

Proposition 4.3.3. Ω_1 *est la classe des graphes d'ordre* ≥ 7 *de la classe* $\mathcal{G}$.

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe d'ordre ≥ 7, (-1)-critique en $2k+1$, tel que $I'(G) = P_{2n+1}$, où $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. D'après le lemme 4.3.4, $G(\mathbb{N}_{2n}) \in \mathcal{G}_{2n}(2k+1)$. On a $S = \mathbb{N}_{2n}$, autrement, d'après le lemme 4.2.1, pour $\gamma \in S - \mathbb{N}_{2n}$, $(1,2) \equiv (1,\gamma) \equiv (3,\gamma) \equiv \cdots \equiv (2n-1,\gamma) \equiv (2n-1,1) \equiv (2,1)$. Contradiction car, d'après le lemme 4.3.5, $(1,2) \equiv (0,1) \not\equiv (2,1)$. D'après le lemme 4.3.6, $(2k, 2k+2) \not\equiv (1,2)$. Si $(2k, 2k+2) \equiv (0,2)$, alors $(2n-2, 2n) \not\equiv (0,2)$. Sinon, on a une contradiction en vérifiant, avec l'aide du lemme 4.3.5 , que $\{2k, 2k+2\}$ est un intervalle du graphe indécomposable $G - \{2k+1\}$. Si $k = 0$, alors $(2n-2, 2n) \not\equiv (1,2)$. Autrement, en utilisant le lemme 4.3.5, $\{2, \cdots, 2n-1\}$ est un intervalle non trivial du graphe indécomposable $G-\{0,1\}$, contradiction. Lorsque $k=n-1$, l'application $i \longmapsto 2n-i$ est un isomorphisme de G sur un graphe H de Ω_1 et on a $H \in \mathcal{G}_{2n}(1)$. D'après ce qui précède, $(2n-2,2n) \not\equiv_H (1,2)$, donc $(2,0) \not\equiv_G (2n-1,2n-2) \equiv_G (2,1)$.

$\square$

La classe Ω_2

Nous caractérisons la classe $\mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$ comme suit.

Lemme 4.3.8. *Soit un graphe G défini sur $\mathbb{N}_{2n+1}$, où $n \geq 1$. $G \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$, où $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, si et seulement si $(0,1) \not\equiv (2,1) \not\equiv (2n,2n+1)$ et pour tous $i \leq j \in \mathbb{N}_n$ on a : pour $i \leq k$, $(2i,2j+1) \equiv (0,1)$; pour $i \geq k+1$, $(2i,2j+1) \equiv (2n,2n+1)$; pour $i<j$, $(2i+1,2j) \equiv (1,2) \equiv (2i+1,2j+1)$, $(2i,2j) \equiv (0,2)$ si $j \leq k$ et $(2i,2j) \equiv (1,2)$ si $j \geq k+1$.*

Preuve. Soient $n \geq 1$, $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ et $G \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$. Considérons $i \leq j \in \mathbb{N}_n$. Comme pour tout $l \in \{1,\cdots,2n\}-\{2k+1\}$, $\{l-1,l+1\}$ est un intervalle de $G-l$, alors pour $i \leq k$, $(2i,2j+1) \equiv (0,2j+1) \equiv (0,1)$; pour $i \geq k+1$, $(2i,2j+1) \equiv (2i,2n+1) \equiv (2n,2n+1)$ et pour $i<j \leq k$, $(2i,2j) \equiv (0,2j) \equiv (0,2)$. Comme de plus $\mathbb{N}_{2n+1}-\{0,1\}$ et $\mathbb{N}_{2n+1}-\{2n,2n+1\}$ sont des intervalles respectifs de $G-0$ et de $G-\{2n+1\}$, alors, pour $i<j$, $(2i+1,2j) \equiv (1,2j) \equiv (1,2) \equiv (1,2j+1) \equiv (2i+1,2j+1)$ et, pour $j \geq k+1$ et $i<j$, $(2i,2j) \equiv (2i,2n) \equiv (1,2n) \equiv (1,2)$. En outre, $(0,1) \not\equiv (2,1)$ et

$(2n, 2n+1) \not\equiv (2n, 2n-1) \equiv (2, 1)$ car $\mathbb{N}_{2n+1} - \{1\}$ et $\mathbb{N}_{2n+1} - \{2n\}$ ne sont pas des intervalles de G.

Réciproquement, on observe que pour tout $i \in \{2, \cdots, 2n+1\}$ (resp. $i \in \mathbb{N}_{2n-1}$), on a $(1, i) \equiv (1, 2)$ (resp. $(i, 2n) \equiv (1, 2)$), c'est-à-dire, $\{2, \cdots, 2n+1\}$ et $\mathbb{N}_{2n-1}$ sont des intervalles respectifs de $G - 0$ et de $G - \{2n+1\}$. Comme de plus $(2n, 2n+1) \not\equiv (2, 1) \not\equiv (0, 1)$, $\mathbb{N}_{2n+1} - \{1\}$ et $\mathbb{N}_{2n+1} - \{2n\}$ ne sont pas des intervalles de G. Enfin, pour $i \in \{1, \cdots, 2n\} - \{2k+1\}$ et pour $x \in \mathbb{N}_{2n+1} - \{i-1, i, i+1\}$, on vérifie que $(x, i-1) \equiv (x, i+1)$ de sorte que $\{i-1, i+1\}$ est un intervalle de $G - i$.

$\square$

Nous caractérisons maintenant les graphes indécomposables de $\mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$.

Lemme 4.3.9. *Soient* $n \geq 1$, $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ *et* $G \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$. *Le graphe* G *est indécomposable si et seulement si* $(0, 1) \not\equiv (1, 2)$.

Preuve. Soit un graphe $G \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$. Supposons que $(0, 1) \equiv (1, 2)$. D'après le lemme 4.3.8, $(0, 1) \not\equiv (2, 1)$. Ainsi, quitte à remplacer G par $G^\star$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1$. On vérifie avec l'aide du lemme 4.3.8, que $\mathbb{N}_{2k+1} \longrightarrow \{2k+2, \cdots, 2n+1\}$, en particulier, G est décomposable. Supposons maintenant que $(0, 1) \not\equiv (1, 2)$ et montrons, par récurrence sur n, que pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, les graphes de $\mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$ sont indécomposables. Avec le lemme 4.3.8, on vérifie que les graphes de $\mathcal{G}_3(1)$ sont indécomposables. Soit $n > 1$ et soit $G \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$, où $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. D'après les remarques 4.3.3 et 4.3.2, $G - \{2n, 2n+1\} \in \mathcal{G}_{2n-1}(2k+1)$ lorsque $k \neq n-1$; $G - \{0,1\}$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{G}_{2n-1}(2n-3)$ lorsque $k = n-1$. Il s'ensuit, par hypothèse de récurrence, que $G - \{2n, 2n+1\}$ ou $G - \{0,1\}$ est indécomposable. De plus, $2n+1 \not\in [\mathbb{N}_{2n-1}]$ et $0 \not\in [\{2, \cdots, 2n+1\}]$. Il s'ensuit que G est indécomposable d'après la remarque 4.3.3.

$\square$

Nous introduisons maintenant la classe $\mathcal{G}'$ des graphes $G := (S, A)$ tels que $S := \mathbb{N}_{2n+1}$ ou $\mathbb{N}_{2n+1} \cup \{\alpha\}$, où $n \geq 1$; $G(\mathbb{N}_{2n+1}) \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$ et $k \in \mathbb{N}_{n-1}$; $(0,1) \equiv (1,2)$ si et seulement si $S \neq \mathbb{N}_{2n+1}$ et tels que :

- Si $S = \mathbb{N}_{2n+1}$, alors $(2n, 2n+1) \not\equiv (0,1)$ lorsque $(0,2) \equiv (1,2)$; $(2n, 2n+1) \not\equiv (1,2)$ lorsque $k = 0$; $(0,1) \not\equiv (0,2)$ lorsque $k = n-1$.
- Si $S - \mathbb{N}_{2n+1} = \{\alpha\}$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $(2i+1, \alpha) \equiv (1,2)$, $(2i, \alpha) \equiv (0, \alpha)$ si $i \leq k$, $(2i, \alpha) \equiv (1, 0)$ si $i \geq k+1$; $(0, \alpha) \not\equiv (1,2)$; $(0, \alpha) \equiv (\alpha, 0)$ lorsque $(0,2) \equiv (1,2) \equiv (2n, 2n+1)$.

Lemme 4.3.10. *Les graphes d'ordre ≥ 7 de la classe $\mathcal{G}'$ sont des graphes de la classe Ω_2.*

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe d'ordre ≥ 7 de la classe $\mathcal{G}'$, il existe $n \geq 2$,

$k \in \mathbb{N}_{n-1}$ tels que $S = \mathbb{N}_{2n+1}$ ou $\mathbb{N}_{2n+1} \cup \{\alpha\}$ et $G(\mathbb{N}_{2n+1}) \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$. D'après la remarque 4.3.3, pour tout $i \in \mathbb{N}_{2n}$, il existe un isomorphisme σ de $G(\mathbb{N}_{2n+1}) - \{i, i+1\}$ sur $G(\mathbb{N}_{2n+1}) - \{0,1\}$ ou $G(\mathbb{N}_{2n-1})$. Lorsque $S = \mathbb{N}_{2n+1} \cup \{\alpha\}$, σ se prolonge en un isomorphisme, fixant α, de $G - \{i, i+1\}$ sur $G - \{0,1\}$ ou $G - \{2n, 2n+1\}$. Pour tout $x \in S - \{1, 2n\}$, $G - \{x, 0\}$ et $G - \{x, 2n+1\}$ sont décomposables. De même, lorsque $\alpha \in S$, $G - \{\alpha, 2k+1\}$ est décomposable car $\mathbb{N}_{2k}$ et $\{2k+2, \cdots, 2n+1\}$ en sont des intervalles. Il suffit de montrer que les graphes G, $G - \{0,1\}$ et $G - \{2n, 2n+1\}$ sont indécomposables. En effet, dans ce cas, par constuction de $\mathcal{G}'$, tous les sommets de $G - \{2k+1\}$, sont des sommets critiques de G. Il s'ensuit en utilisant ce qui précède, que $I'(G) = P_{2n+2}$ d'après le lemme 4.2.1. De plus, $\{2k, 2k+2\}$ n'est pas un intervalle de $G - \{2k+1\}$. En effet, si $(0,2) \equiv (1,2) \not\equiv (0,1)$, alors $S = \mathbb{N}_{2n+1}$ et $(2k, 2n+1) \equiv (0,1) \not\equiv (2n, 2n+1) \equiv (2k+2, 2n+1)$. Supposons que $(0,2) \equiv (1,2) \equiv (0,1)$. Dans ce cas $S = \mathbb{N}_{2n+1} \cup \{\alpha\}$. Si $(0,2) \equiv (2n, 2n+1)$ (resp. $(0,2) \not\equiv (2n, 2n+1)$), alors $(\alpha, 2k+2) \equiv (1,2) \not\equiv (\alpha, 0) \equiv (\alpha, 2k)$ (resp. $(2k, 2n+1) \equiv (0,1) \not\equiv (2n, 2n+1) \equiv (2k+2, 2n+1)$). Si $(0,2) \not\equiv (1,2)$, alors $k \neq 0$ et $(0, 2k+2) \equiv (1,2) \not\equiv (0,2) \equiv (0,2k)$. D'après le lemme 4.2.1, $2k+1$ est un sommet non critique de G, et donc G est (-1)-critique en $2k+1$.

Montrons pour finir, que G, $G - \{0,1\}$ et $G - \{2n, 2n+1\}$ sont indécomposables. Supposons d'abord que $S = \mathbb{N}_{2n+1}$. Comme $(0,1) \not\equiv (1,2)$ alors, d'après le lemme 4.3.9, G est indécomposable. Si $k \neq n-1$, d'après la remarque 4.3.3, $G - \{2n, 2n+1\} \in \mathcal{G}_{2n-1}(2k+1)$ et donc, $G - \{2n, 2n+1\}$ est indécomposable d'après le lemme 4.3.9. Si $k = n-1$, $G - \{2n, 2n+1\} \in \mathcal{F}_{2n-1}$ et, comme $(0,2) \not\equiv (0,1) \not\equiv (1,2)$, $G - \{2n, 2n+1\}$ est indécomposable d'après le lemme 4.3.2. L'application $\tau : l \longmapsto l-2$ est un isomorphisme de $G - \{0,1\}$ sur un graphe H de $\mathcal{G}_{2n-1}(2k-1)$ ou de $\mathcal{F}_{2n-1}$, suivant que $k \geq 1$ ou que $k = 0$ respectivement. Si $k \geq 1$, alors $(2,3) \not\equiv_G (3,4)$, et donc $(0,1) \not\equiv_H (1,2)$. Si $k = 0$, alors $(2,4) \not\equiv_G (2,3) \not\equiv_G (3,4)$ et donc $(0,2) \not\equiv_H (0,1) \not\equiv_H (1,2)$. D'après les lemmes 4.3.9 et 4.3.2, le graphe H, et donc $G - \{0,1\}$, est indécomposable. Supposons enfin que $S - \mathbb{N}_{2n+1} = \{\alpha\}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on pose $X_i := \mathbb{N}_{2i+1} \cup \{\alpha\}$. On vérifie que $G(X_0)$ est indécomposable. Soit $i \in \mathbb{N}_{n-1}$. Supposons que $G(X_i)$ est indécomposable. Si $i < k$, alors $2i+3 \in X_i(2i+1)$, $2i+2 \notin X_i(2i+1)$ et $(2i+2, 2i+1) \not\equiv (2i+2, 2i+3)$. Si $i \geq k$, alors $2i+2 \in [X_i]$, $2i+3 \notin [X_i]$ et $(2i+2, 2i+1) \not\equiv (2i+2, 2i+3)$. Ainsi, $G(X_{i+1})$ est indécomposable d'après le lemme 4.1.1. En particulier, $G - \{2n, 2n+1\}$ et G sont indécomposables. Montrons enfin que $G - \{0,1\}$ est indécomposable. Pour $k \geq 1$, l'application $\tau : l \longmapsto l-2$ se prolonge en un isomorphisme, fixant α, de $G - \{0,1\}$

sur un graphe G'. On vérifie que $G' \in \mathcal{G}'$ et on déduit, d'après ce qui précède, que G', et donc $G - \{0,1\}$ est indécomposable. Supposons maintenant que $k = 0$. Si $(2n, 2n+1) \equiv (1,2)$, on vérifie que $G - \{0,1\}$ est isomorphe au tournoi critique V_{2n+1}. Supposons alors que $(2n, 2n+1) \not\equiv (1,2)$. Comme $(2,4) \not\equiv (2,3) \not\equiv (3,4)$, d'après le lemme 4.3.2 et la remarque 4.3.3, $G - \{0,1,\alpha\}$ est indécomposable. On a $\alpha \in Ext(Y)$, où $Y := S - \{0,1,\alpha\}$. En effet, $\alpha \notin [Y]$ car $(2,\alpha) \equiv (2,1) \not\equiv (1,2) \equiv (3,\alpha)$. De plus, pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, $(2i, 2n+1) \equiv (2n, 2n+1) \not\equiv (2,1) \equiv (\alpha, 2n+1)$ et $(\alpha, 2) \equiv (1,2) \not\equiv (2i+1, 2)$. Il s'ensuit que pour tout $j \in \{2, \cdots, 2n+1\}$, $\alpha \notin Y(j)$.

□

Proposition 4.3.4. *À des isomorphismes près, les graphes de la classe Ω_2 sont les graphes d'ordre ≥ 7 de $\mathcal{G}'$.*

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe d'ordre ≥ 7, (-1)-critique en $2k+1$, tel que $I'(G) = P_{2n+2}$, où $n \geq 1$ et $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. D'après le lemme 4.3.4, $G(\mathbb{N}_{2n+1}) \in \mathcal{G}_{2n+1}(2k+1)$. D'après le lemme 4.3.9 et le corollaire 4.2.1, $S - \mathbb{N}_{2n+1} \neq \emptyset$ si et seulement si $(0,1) \equiv (1,2)$. Supposons d'abord que $S = \mathbb{N}_{2n+1}$. Si $(0,2) \equiv (1,2)$, alors $(2n, 2n+1) \not\equiv (0,1)$. Autrement, on vérifie à l'aide du lemme 4.3.8, que $\{2k, 2k+2\}$ est un intervalle de $G - \{2k+1\}$, contradiction. Si $k = 0$, alors $(0,2) \equiv (1,2)$. On a $(2n, 2n+1) \not\equiv (1,2)$ sinon $G - 0 \simeq \mathcal{O}_{2n}$, contradiction. Si $k = n-1$, $G - \{2n, 2n+1\}$ est, d'après la remarque 4.3.3, un graphe de $\mathcal{F}_{2n-1}$. Comme ce graphe est indécomposable, alors $(0,2) \not\equiv (0,1)$ d'après le lemme 4.3.2. Supposons maintenant que $S - \mathbb{N}_{2n+1} \neq \emptyset$. À un isomorphisme près, $\alpha \in S - \mathbb{N}_{2n+1}$. D'après le lemme 4.2.1, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $(2i+1, \alpha) \equiv (1,2)$, $(2i, \alpha) \equiv (0, \alpha)$ si $i \leq k$; $(2i, \alpha) \equiv (2,1) \equiv (1,0)$ si $i \geq k+1$. Par les lemmes 4.3.8 et 4.3.4, $(2,1) \not\equiv (1,2)$. Ainsi, quitte à remplacer G par $G^{\star}$, on peut supposer que $0 \longrightarrow 1$ et $1 \longrightarrow 2$. Il existe $\gamma \in S - \mathbb{N}_{2n+1}$ tel que $(0,\gamma) \not\equiv (1,2)$, sinon on a une contradiction en vérifiant que $(S - \mathbb{N}_{2n+1}) \cup \{2k+2, \cdots, 2n+1\}$ est un intervalle non trivial de G. Si $(0,2) \equiv (1,2) \equiv (2n, 2n+1)$, on vérifie, avec l'aide du lemme 4.3.8, que $G(\mathbb{N}_{2n+1}) = \mathcal{O}_{2n+1}$. Il s'ensuit que $(0,\gamma) \equiv (\gamma, 0)$, autrement $G(\mathbb{N}_{2n+1} \cup \{\gamma\}) \simeq V_{2n+3}$, contradiction d'après le corollaire 4.2.1. Ainsi $G(\mathbb{N}_{2n+1} \cup \{\gamma\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{G}'$. Lorsque $n = 1$, on vérifie que $G(\mathbb{N}_{2n+1} \cup \{\gamma\}) = G(\{0,1,2,3,\gamma\})$ est indécomposable. Lorsque $n \geq 2$, $G(\mathbb{N}_{2n+1} \cup \{\gamma\})$ est indécomposable d'après le lemme 4.3.10. D'après le corollaire 4.2.1, $\gamma = \alpha$ et $S = \mathbb{N}_{2n+1} \cup \{\gamma\}$.

$\square$

La classe Ω_3

Lemme 4.3.11. *Soit un graphe G défini sur $\mathbb{N}_{2n}$, où $n \geq 2$. $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$, où $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, si et seulement si $(0,1) \not\equiv (2,1) \not\equiv (2n-1, 2n)$ et pour tous $x < y \in \mathbb{N}_{2n}$, on a : $(x,y) \equiv (0,2)$ si x et y sont pairs ; $(x,y) \equiv (0,1)$ si x est pair, y est impair* *et* $y < 2k$ *;* $(x,y) \equiv (2n-1,2n)$ *si* x *est impair,* y *est pair et* $x > 2k$ *;* $(x,y) \equiv (1,2)$ *dans le reste des cas.*

Preuve. Soient $n \geq 2$, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$, $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$ et soient $x < y \in \mathbb{N}_{2n}$. Comme pour tout $l \in \{1, \cdots, 2n-1\} - \{2k\}$, $\{l-1, l+1\}$ est un intervalle de de $G - l$, alors $(x,y) \equiv (0,2)$ si x et y sont pairs; $(x,y) \equiv (0,1)$ si x est pair, y est impair et $y < 2k$; $(x,y) \equiv (2n-1,2n)$ si x est impair, y est pair et $x > 2k$. Comme de plus $\mathbb{N}_{2n} - \{0,1\}$ et $\mathbb{N}_{2n-2}$ sont des intervalles respectifs de $G - 0$ et de $G - 2n$, on vérifie que dans le reste des cas $(x,y) \equiv (1,2)$. Puisque $\mathbb{N}_{2n} - \{1\}$ et $\mathbb{N}_{2n} - \{2n-1\}$ ne sont pas des intervalles de G, alors $(0,1) \not\equiv (2,1) \equiv (2n-1, 2n-2) \not\equiv (2n-1, 2n)$.

Réciproquement, comme pour tout $i \in \mathbb{N}_{2n} - \{0,1\}$ (resp. $i \in \mathbb{N}_{2n-2}$), on a $(1,i) \equiv (1,2)$ (resp. $(i, 2n-1) \equiv (1,2)$), alors $\mathbb{N}_{2n} - \{0,1\}$ et $\mathbb{N}_{2n-2}$ sont des intervalles respectifs de $G-0$ et de $G-2n$. Comme $(2n-1,2n) \not\equiv (2,1) \not\equiv (0,1)$, alors $\mathbb{N}_{2n} - \{1\}$ et $\mathbb{N}_{2n} - \{2n-1\}$ ne sont pas des intervalles de G. Soit $j \in \{1, \cdots, 2n-1\} - \{2k\}$. Pour $x \in \mathbb{N}_{2n} - \{j-1, j, j+1\}$, $(x, j-1) \equiv (x, j+1)$, et donc $\{j-1, j+1\}$ est un intervalle de $G - j$.

$\square$

Lemme 4.3.12. *Soient* $n \geq 2$, $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ *et* $G \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$. G *est indécomposable si et seulement si* $(0,2) \not\equiv (1,2)$.

Preuve. Si $(0,2) \equiv (1,2)$, d'aprés le lemme 4.3.11, $\mathbb{N}_{2k}$ est un intervalle non trivial de G. Donc G est décomposable. Supposons que $(0,2) \not\equiv (1,2)$. Pour $n = 2$, $G \in \mathcal{G}_4(2)$ et on vérifie avec l'aide du lemme 4.3.11, que G est indécomposable. Soit $n > 2$. Par la remarque 4.3.3 et par hypothèse de récurrence, $G - \{2n-1, 2n\}$ ou $G - \{0,1\}$ est indécomposable. De plus, $2n \notin [\mathbb{N}_{2n-2}]$ et $0 \notin [\{2, \cdots, 2n\}]$, donc G est indécomposable d'après la remarque 4.3.3 .

□

Nous considérons enfin la classe $\mathcal{G}''$ des graphes $G := (S, A)$ tels que $S := \mathbb{N}_{2n}$, $\mathbb{N}_{2n} \cup \{\alpha\}$ ou $\mathbb{N}_{2n} \cup \{\alpha, \beta\}$, où $n \geq 2$; $G(\mathbb{N}_{2n}) \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$ où $k \in \{1, \cdots, n-1\}$; $(0,2) \equiv (1,2)$ si et seulement si $S - \mathbb{N}_{2n} \neq \emptyset$ et tels que :

- Si $S = \mathbb{N}_{2n}$, alors $(2n-1, 2n) \not\equiv (1,2)$ lorsque $(0,1) \equiv (1,2)$; $(0,2) \not\equiv (2n-1, 2n)$ lorsque $k = 1$; $(0,2) \not\equiv (0,1)$ lorsque $k = n-1$.
- Si $S - \mathbb{N}_{2n} \neq \emptyset$, alors pour tous $x \in \mathbb{N}_{2n}$ et $\gamma \in S - \mathbb{N}_{2n}$, $(x, \gamma) \equiv (0, \gamma)$ si x est pair, $(x, \gamma) \equiv (1,2)$ ou $(2,1)$ si x est impair et suivant que $x < 2k$ ou que $x > 2k$ respectivement. De plus, si $S - \mathbb{N}_{2n} = \{\alpha\}$, alors $(2,1) \not\equiv (0,\alpha) \not\equiv (1,2)$. Si $S - \mathbb{N}_{2n} = \{\alpha, \beta\}$, alors $(\beta, \alpha) \not\equiv (0, \alpha) \equiv (1,2) \not\equiv (2,1) \equiv (0, \beta)$.

La remarque suivante complète la remarque 4.3.2.

Remarque 4.3.6. *Soit* $G := (S, A)$ *un graphe défini sur* $\mathbb{N}_{2n}$*, sur* $\mathbb{N}_{2n} \cup \{\alpha\}$ *ou* *sur* $\mathbb{N}_{2n} \cup \{\alpha, \beta\}$ *où* $n \geq 2$. *Si* $G \in \mathcal{G}''$, *alors la permutation* h *de* S *définie par* $h(x) := 2n - x$ *si* $x \in \mathbb{N}_{2n}$, $h(\alpha) := \alpha$ *lorsque* $S - \mathbb{N}_{2n} = \{\alpha\}$, $h(\alpha) := \beta$ *et* $h(\beta) := \alpha$ *lorsque* $S - \mathbb{N}_{2n} = \{\alpha, \beta\}$, *est un isomorphisme de* G *sur un graphe de* $\mathcal{G}''$.

Lemme 4.3.13. *Étant donné un graphe* G *de la classe* $\mathcal{G}''$, *il existe* $n \geq 2$ *et* $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ *tels que* G *est (-1)-critique en* $2k$ *et* $I'(G) = P_{2n+1}$.

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe de la classe $\mathcal{G}''$. Il existe $n \geq 2$ et $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ tels que $S - \mathbb{N}_{2n} = \emptyset$, $\{\alpha\}$ ou $\{\alpha, \beta\}$ et $G(\mathbb{N}_{2n}) \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$. Nous montrons d'abord que les graphes G, $G - \{0, 1\}$ et $G - \{2n-1, 2n\}$ sont indécomposables. Supposons d'abord que $S = \mathbb{N}_{2n}$. Comme $(0, 2) \not\equiv (1, 2)$, d'aprés le lemme 4.3.12, G est indécomposable. Si $k \neq n-1$, d'après la remarque 4.3.3, $G - \{2n-1, 2n\} \in \mathcal{G}_{2n-2}(2k)$ et donc, $G - \{2n-1, 2n\}$ est indécomposable d'après le lemme 4.3.12. Si $k = n-1$, $G - \{2n-1, 2n\} \in \mathcal{F}_{2n-2}$, et comme $(0, 1) \not\equiv (0, 2) \not\equiv (1, 2)$, alors $G - \{2n-1, 2n\}$ est indécomposable d'après le lemme 4.3.2. Supposons maintenant que $S - \mathbb{N}_{2n} \neq \emptyset$. Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pose $X_i := \mathbb{N}_{2i} \cup (S - \mathbb{N}_{2n})$. On vérifie que $G(X_1)$ est indécomposable. Soit $i \in \{1, \cdots n-1\}$. Supposons que $G(X_i)$ est indécomposable. Si $i < k$, alors $2i + 2 \in X_i(2i)$, $2i + 1 \notin X_i(2i)$ et $(2i + 1, 2i) \not\equiv (2i + 1, 2i + 2)$. Si $i \geq k$, alors $2i + 1 \in [X_i]$, $2i + 2 \notin [X_i]$ et $(2i + 1, 2i) \not\equiv (2i + 1, 2i + 2)$. Ainsi, $G(X_{i+1})$ est indécomposable d'après le lemme 4.1.1. En particulier, $G - \{2n-1, 2n\}$ et G sont indécomposables. Enfin, nous déduisons, à l'aide de la remarque 4.3.6, que $G - \{0, 1\}$

est indécompsable. En effet, il existe un isomorphisme h de G sur un graphe H de $\mathcal{G}''$, avec $h(0) = 2n$ et $h(1) = 2n-1$. La restriction de h à $S-\{0,1\}$ est un isomorphisme de $G-\{0,1\}$ sur $H-\{2n-1,2n\}$. Le graphe $H-\{2n-1,n\}$ étant indécomposable d'après ce qui précède, il en est de même pour $G-\{0,1\}$.

Soit $i \in \mathbb{N}_{2n-1}$. D'après la remarque 4.3.3, il existe un isomorphisme σ de $G(\mathbb{N}_{2n})-\{i,i+1\}$ sur $G(\mathbb{N}_{2n})-\{0,1\}$ ou $G(\mathbb{N}_{2n})-\{2n-1,2n\}$. Lorsque $S-\mathbb{N}_{2n} \neq \emptyset$, σ se prolonge en un isomorphisme, fixant chaque sommet de $S-\mathbb{N}_{2n}$, de $G-\{i,i+1\}$ sur $G-\{0,1\}$ ou $G-\{2n-1,2n\}$. Il s'ensuit que $\{i,i+1\}$ est une arête de $I(G)$. De plus, pour $x \in S-\{1,2n-1\}$, $G-\{x,0\}$ et $G-\{x,2n\}$ sont décomposables. Lorsque $S-\mathbb{N}_{2n} = \{\alpha\}$, $G-\alpha$ et $G-\{\alpha,2k\}$ sont décomposables car dans ce cas, $\mathbb{N}_{2k} \sim \{2k+1,\cdots,2n\}$. Lorsque $S-\mathbb{N}_{2n} = \{\alpha,\beta\}$, $G-\alpha$, $G-\beta$, $G-\{\alpha,2k\}$, $G-\{\beta,2k\}$ et $G-\{\alpha,\beta\}$ sont décomposables car dans ce cas, $\mathbb{N}_{2k} \sim \{2k+1,\cdots,2n,\alpha\}$ et $(\mathbb{N}_{2k} \cup \{\beta\}) \sim \{2k+1,\cdots,2n\}$. Il s'ensuit que tous les sommets de $S-\{2k\}$, sont des sommets critiques de G et que $I'(G) = P_{2n+1}$ d'après le lemme 4.2.1. De plus, $\{2k-1,2k+1\}$ n'est pas un intervalle de $G-2k$. En effet, si $(1,2) \equiv (2,1)$, alors $(0,2k-1) \not\equiv (0,2k+1)$. Si $(1,2) \not\equiv (2,1)$ et $S-\mathbb{N}_{2n} \neq \emptyset$, alors $(\alpha,2k-1) \not\equiv (\alpha,2k+1)$. Supposons enfin que $(1,2) \not\equiv (2,1)$ et $S = \mathbb{N}_{2n}$, alors $(0,2k-1) \not\equiv (0,2k+1)$ ou $(2n,2k-1) \not\equiv (2n,2k+1)$ suivant que $(0,1) \not\equiv (1,2)$ ou que $(0,1) \equiv (1,2)$

respectivement. Par le lemme 4.2.1, $2k$ est un sommet non critique de G. Ainsi, G est (-1)-critique en $2k$.

□

Proposition 4.3.5. *À des isomorphismes près, les graphes de la classe Ω_3 sont les graphes d'ordre ≥ 7 de $\mathcal{G}''$.*

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe d'ordre ≥ 7, (-1)-critique en $2k$, tel que $I'(G) = P_{2n+1}$, où $n \geq 2$ et $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. D'après le lemme 4.3.4, $G(\mathbb{N}_{2n}) \in \mathcal{G}_{2n}(2k)$. D'après le lemme 4.3.12 et le corollaire 4.2.1, $(0, 2) \equiv (1, 2)$ si et seulement si $S - \mathbb{N}_{2n} \neq \emptyset$. Supposons que $S = \mathbb{N}_{2n}$. Si $(0, 1) \equiv (1, 2)$, alors $(2n-1, 2n) \not\equiv (1, 2)$. Autrement, d'après le lemme 4.3.11, $\{2k-1, 2k+1\}$ est un intervalle non trivial du graphe indécomposable $G - \{2k\}$, contradiction. Si $k = n-1$ (resp. $k = 1$) alors $(0, 2) \not\equiv (0, 1)$ (resp. $(0, 2) \not\equiv (2n-1, 2n)$) car sinon $\{1, \cdots, 2n-2\}$ (resp. $\{2, \cdots, 2n-1\}$) est un intervalle non trivial du graphe indécomposable $G - \{2n-1, 2n\}$ (resp. $G - \{0, 1\}$), contradiction. Supposons maintenant que $S - \mathbb{N}_{2n} \neq \emptyset$. Soit $x \in \mathbb{N}_{2n}$ et $\gamma \in S - \mathbb{N}_{2n}$. D'après le lemme 4.2.1, $(x, \gamma) \equiv (0, \gamma)$ si x est pair, $(x, \gamma) \equiv (1, 2)$ ou $(2, 1)$ si x est impair et suivant que $x < 2k$ ou que $x > 2k$ respectivement. S'il existe $\mu \in S - \mathbb{N}_{2n}$ tel que $(1, 2) \not\equiv (0, \mu) \not\equiv (2, 1)$, alors $G(\mathbb{N}_{2n} \cup \{\mu\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{G}''$ et, d'après le corollaire 4.2.1, $G = G(\mathbb{N}_{2n} \cup \{\mu\})$. Sinon,

$(1,2) \not\equiv (2,1)$ et $S - \mathbb{N}_{2n} = E_1 \cup E_2$, où $E_1 := \{\gamma \in S - \mathbb{N}_{2n} : (0,\gamma) \equiv (1,2)\}$ et $E_2 := \{\gamma \in S - \mathbb{N}_{2n} : (0,\gamma) \equiv (2,1)\}$. Il existe $\alpha_1 \in E_1$ et $\alpha_2 \in E_2$ tels que $(\alpha_2, \alpha_1) \not\equiv (1,2)$ sinon $(E_2 \cup \mathbb{N}_{2k}) \sim (E_1 \cup \{2k+1, \cdots, 2n\})$, contradiction car G est indécomposable. Ainsi, $G(\mathbb{N}_{2n} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{G}''$ et donc $G = G(\mathbb{N}_{2n} \cup \{\alpha_1, \alpha_2\})$ d'après le corollaire 4.2.1.

$\square$

4.3.3 Les graphes (-1)-critiques G tels que $I'(G)$ est un arbre étoilé

Soient un entier $k \geq 3$, $p_1, \cdots, p_k$, k entiers ≥ 2 et $i \in \{1, \cdots, k\}$. On pose $i_0 := 0$, $S_{i_{p_i}} := \{i_0, \cdots, i_{p_i}\}$ et $S(p_1, \cdots, p_k) := \bigcup_{l=1}^{k} S_{l_{p_l}}$. On désigne par $P_{i_{p_i}}$ le chemin défini sur $S_{i_{p_i}}$ par $A(P_{i_{p_i}}) := \{\{i_l, i_h\}, \mid l-h \mid = 1\}$ et on note $\mathcal{A}(p_1, \cdots, p_k)$ l'arbre 0-étoilé défini sur $S(p_1, \cdots, p_k)$ et dont les branches sont $P_{1_{p_1}}, \cdots, P_{k_{p_k}}$. Pour $i \neq j \in \{1, \cdots, k\}$, on considère l'application $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}$ définie sur $S_{i_{p_i}} \cup S_{j_{p_j}}$ par $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}(i_l) := p_i - l$ et $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}(j_h) := p_i + h$.

Remarque 4.3.7. *Si G un graphe (-1)-critique en 0, tel que $I'(G) = \mathcal{A}(p_1, \cdots, p_k)$, l'application $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}$ est un isomorphisme de $G(S_{i_{p_i}} \cup S_{j_{p_j}})$ sur un graphe G' de la classe $\mathcal{G}_{p_i+p_j}(p_i)$.*

Afin d'introduire les graphes (-1)-critiques de ce paragraphe, nous rappelons qu'un graphe *discret* est un graphe G n'admettant aucun arc, c'est-à-dire tel que $A(G) = \emptyset$. Un graphe G est *complet* lorsque son graphe complémentaire $\overline{G}$ est discret.

Conformément à la proposition 4.2.1, nous distinguons les graphes (-1)-critiques G, suivant que l'arbre étoilé $I'(G)$ admet ou n'admet pas une branche de longueur impaire. Nous construisons alors pour k entiers non nuls $n_1,\ n_2, \cdots, n_k$ où $k \geq 3$, deux classes de graphes $\mathcal{H}(2n_1 + 1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ et $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$, comme suit.

1. $\mathcal{H}(2n_1 + 1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ est la classe des graphes G définis sur $S(2n_1 + 1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ et qui vérifient les conditions suivantes.
   - Chacun des graphes $G(\{0, 1_1\})$ et $G(\{i_1, i_2\})$, où $i \in \{2, \cdots, k\}$, est non discret.
   - Pour tous $x \neq y \in S(2n_1 + 1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$, on a :
     - Si $(x, y) \in A_1 := \{(1_{2l+1}, 1_{2j+1}) : 0 \leq l < j \leq n_1\}$, alors $(x, y) \equiv (1_1, 1_3)$.
     - Si $(x, y) \in A_i := \{(i_{2l+1}, i_{2j}) : 0 \leq l < j \leq n_i\}$, où $i \in \{2, \cdots, k\}$, alors $(x, y) \equiv (i_1, i_2)$.
     - Si $(x, y) \in E \cup F$, où $E := \{(i_{2j}, 1_{2l+1}) :\ 2 \leq i \leq k,\ 0 \leq j \leq n_i,\ 0 \leq l \leq n_1\}$ et $F := \{(1_{2j}, 1_{2l+1}) : 0 \leq j \leq l \leq n_1\}$ alors $(x, y) \equiv (0, 1_1)$.
     - Si $\{(x, y), (y, x)\} \bigcap ((\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \bigcup E \bigcup F) = \emptyset$, alors le graphe $G(\{x, y\})$ est discret.

2. $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$ est la classe des graphes G définis sur $S(2n_1, \cdots, 2n_k)$ ou $S(2n_1, \cdots, 2n_k) \cup \{\gamma\}$, où $\gamma \notin S(2n_1, \cdots, 2n_k)$, et qui vérifient les conditions suivantes.
   - Pour tout $i \in \{1, \cdots, k\}$, le graphe $G(\{i_1, i_2\})$ est non discret.
   - Pour tous $i_p \neq j_q \in S(2n_1, \cdots, 2n_2)$, on a : $i_p \longleftrightarrow j_q$ si p et q sont pairs et $\gamma \notin S(G)$; $(i_p, j_q) \equiv (i_1, i_2)$ si $i = j$, p est impair, q est pair et $p < q$; $i_p - -j_q$ dans le reste des cas.
   - Lorsque $\gamma \in S(G)$, le graphe $G(\{\gamma, 0\})$ est non discret et pour tout $i_p \in S(G) - \{\gamma\}$, $(\gamma, i_p) \equiv (\gamma, 0)$ si p est pair, et $\gamma - -i_p$ si p est impair.

Soit G un graphe de la classe $\mathcal{H}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$, où $p_1 = 2n_1$ ou $2n_1 + 1$, $p_r = 2n_r$ pour $r \in \{2, \cdots k\}$, et soient $i \neq j \in \{1, \cdots, k\}$. Notons les remarques suivantes.

Remarque 4.3.8. *Pour tout $q \in \{0, \cdots, p_i - 1\}$, l'application $g_{i_{p_i}, q}$ définie sur $S(G)$ par $g_{i_{p_i}, q}(x) = i_{l-2}$ si $x = i_l$ avec $l \geq q+2$, et $g_{i_{p_i}, q}(x) = x$ sinon, est un isomorphisme de $G - \{i_q, i_{q+1}\}$ sur $G - \{i_{p_i - 1}, i_{p_i}\}$.*

Remarque 4.3.9. *L'application $f_{i_{p_i}, j_{p_j}}$ est un isomorphisme de $G(S_{i_{p_i}} \cup S_{j_{p_j}})$ sur un graphe de la classe $\mathcal{G}_{p_i + p_j}(p_i)$. De plus, si $\gamma \in S(G)$, alors $G(S_{i_{p_i}} \cup S_{j_{p_j}} \cup \{\gamma\})$ est isomorphe à un graphe de $\mathcal{G}''$, en particulier, il s'agit d'un graphe (-1)-critique.*

Lemme 4.3.14. *Étant donné un graphe G de la classe $\mathcal{H}(2n_1 + 1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$, G est (-1)-critique en 0 et $I(G) = \mathcal{A}(2n_1 + 1, 2n_2 \cdots, 2n_k)$.*

Preuve. Posons $n :=\mid S(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k) \mid$, $p_1 := 2n_1+1$ et $p_i := 2n_i$ pour $i \in \{2, \cdots, k\}$. Notons que n est pair et ≥ 8. Nous montrons par récurrence sur n, que les graphes G et $G - \{i_{p_i}, i_{p_i-1}\}$, où $i \in \{1, \cdots, k\}$, sont indécomposables. Supposons d'abord que G est d'ordre $n = 8$, c'est-à-dire $G \in \mathcal{H}(3, 2, 2)$. L'application f définie par $f(2_2) := 0$, $f(2_1) := 1$, $f(0) := 2$, $f(3_1) := 3$, $f(3_2) := 4$ et $f(1_1) := \alpha$, est un isomorphisme de $G - \{1_2, 1_3\}$ sur un graphe G'. On vérifie que G' est un graphe de la classe $\mathcal{G}''$, en particulier $G - \{1_2, 1_3\}$ est indécomposable. D'après la remarque 4.3.9 et le lemme 4.3.9, les graphes $G - \{2_1, 2_2\}$ et $G - \{3_1, 3_2\}$ sont indécomposables. De plus, $3_1 \in [S(G - \{3_1, 3_2\})]$, $3_2 \notin [S(G - \{3_1, 3_2\})]$ et $(3_1, 3_2) \not\equiv (3_1, 0)$, donc G est indécomposable. Supposons maintenant que G est d'ordre $n \geq 10$. Si pour tout $t \in \{1, \cdots, k\}$, $p_t \leq 3$, c'est-à-dire $G \in \mathcal{H}(3, 2, 2, \cdots, 2)$, alors $k \geq 4$ et $G - \{k_{p_k}, k_{p_k-1}\} \in \mathcal{H}(p_1, \cdots, p_{k-1})$. Sinon, il existe $t \in \{1, \cdots, k\}$ tel que $p_t \geq 4$ et donc $G - \{t_{p_t}, t_{p_t-1}\} \in \mathcal{H}(q_1, \cdots, q_k)$, où $q_t := p_t - 2$ et pour tout $r \in \{1, \cdots, k\} - \{t\}$, $q_r := p_r$. Il s'ensuit en appliquant l'hypothèse de récurrence, qu'il existe $l \in \{1, \cdots, k\}$ tel que $G - \{l_{p_l}, l_{p_l-1}\}$ est indécomposable, et tel que pour tout $m \in \{1, \cdots, k\} - \{l\}$, $G - \{l_{p_l}, l_{p_l-1}, m_{p_m}, m_{p_m-1}\}$ est indécomposable. On vérifie maintenant que $G - \{m_{p_m}, m_{p_m-1}\}$ et G sont indécomposables en utilisant le lemme 4.1.1 avec les parties $X := S(G) - \{l_{p_l}, l_{p_l-1}, m_{p_m}, m_{p_m-1}\}$ et $Y := S(G) - \{m_{p_m}, m_{p_m-1}\}$.

En effet, $l_{p_l-1} \in [X]$, $l_{p_l} \notin [X]$ et $(l_{p_l-1}, l_{p_l}) \not\equiv (l_{p_l-1}, 1_1)$, donc $G - \{m_{p_m}, m_{p_m-1}\}$ est indécomposable. De plus, $m_{p_m-1} \in [Y]$, $m_{p_m} \notin [Y]$ et $(m_{p_m-1}, m_{p_m}) \not\equiv (m_{p_m-1}, 1_1)$, donc G est indécomposable.

Soit $j \in \{1, \cdots, k\}$. On a $S(G) - \{j_{p_j}, j_{p_j-1}\}$ est un intervalle non trivial de $G - j_{p_j}$. De plus, pour tout $l \in \{1, \cdots, p_j - 1\}$, $\{j_{l-1}, j_{l+1}\}$ est un intervalle de $G - j_l$. Il s'ensuit que tous les sommets de $G - 0$ sont des sommets critiques de G. Comme $G - \{j_{p_j}, j_{p_j-1}\}$ est indécomposable, les arêtes de $\mathcal{A}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ sont des arêtes de $I(G)$ d'après la remarque 4.3.8. Nous concluons, en utilisant le lemme 4.2.1 et la proposition 4.2.1, que G est (-1)-critique en 0 et que $I(G) = \mathcal{A}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$.

□

Proposition 4.3.6. *Les graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en 0 et tels que $I'(G) = \mathcal{A}(2n_1 + 1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ sont, aux complémentaires près, les graphes de la classe $\mathcal{H}(2n_1 + 1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$.*

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe (-1)-critique en 0 tel que $I'(G) := \mathcal{A}(2n_1 + 1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$. Montrons que G ou $\overline{G}$ est un graphe de $\mathcal{H}(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$. Notons que pour $i \neq j \in \{2, \cdots, k\}$, on a $(1_{2n_1}, 1_{2n_1-1}) \equiv (1_{2n_1}, i_{2n_i-1}) \equiv (j_{2n_j-1}, i_{2n_i-1}) \equiv$

$(j_{2n_j-1}, 1_{2n_1}) \equiv (1_{2n_1-1}, 1_{2n_1})$. Ainsi, le graphe $G(\{1_{2n_1}, 1_{2n_1-1}\})$ est complet ou discret. Quitte à remplacer G par $\overline{G}$, on peut supposer que $1_{2n_1} - -1_{2n_1-1}$. Nous vérifions à l'aide de la remarque 4.3.7 et des lemmes 4.3.8 et 4.3.11, que $G(S(2n_1 + 1, 2n_2 \cdots, 2n_k))$ est un graphe de la classe $\mathcal{H}(2n_1+1, 2n_2 \cdots, 2n_k)$. Ce graphe étant indécomposable d'après le lemme 4.3.14, $G = G(S(2n_1+1, 2n_2, \cdots, 2n_k))$ d'après le corollaire 4.2.1.

$\square$

Lemme 4.3.15. *Étant donné un graphe G de la classe $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$, G est (-1)-critique en* 0 *et $I'(G) = \mathcal{A}(2n_1, \cdots, 2n_k)$.*

Preuve. Posons $n :=\mid S(G) \mid$ et $p_i := 2n_i$ pour $i \in \{1, \cdots, k\}$. Notons que $n \geq 7$. Nous montrons par récurrence sur n, que les graphes G et $G - \{i_{p_i}, i_{p_i-1}\}$, où $i \in \{1, \cdots, k\}$, sont indécomposables. Supposons d'abord que G est d'ordre $n = 7$, c'est-à-dire $G \in \mathcal{H}(2,2,2)$ et $S(G) = S(2,2,2)$. D'après la remarque 4.3.9 et le lemme 4.3.12, les graphes $G - \{1_1, 1_2\}$, $G - \{2_1, 2_2\}$ et $G - \{3_1, 3_2\}$ sont indécomposables. De plus, $3_1 \in [S(2,2,2) - \{3_1, 3_2\}]$, $3_2 \notin [S(2,2,2) - \{3_1, 3_2\}]$ et $(3_1, 3_2) \not\equiv (3_1, 0)$, donc G est indécomposable. Supposons maintenant que G est d'ordre $n \geq 8$. Soit $i \in \{1, \cdots, k\}$. Si $p_i = 2$ et $k = 3$, alors, d'après la remarque 4.3.9, $G - \{i_{p_i}, i_{p_i-1}\}$ est indécomposable. Sinon, ou bien $p_i = 2$ et $k \geq 4$, ou bien $p_i \geq 4$. Dans le premier cas, $G - \{i_{p_i}, i_{p_i-1}\}$ est isomorphe à un graphe de la classe $\mathcal{H}(q_1, \cdots, q_{k-1})$, où pour tout $t \in \{1, \cdots, k-1\}$, $q_t := p_t$ (resp. p_{t+1}) si $t < i$ (resp. si $t \geq i$). Dans le deuxième cas, $G \in \mathcal{H}(r_1, \cdots, r_k)$, où $r_i := p_i - 2$ et pour tout $t \in \{1, \cdots, k\} - \{i\}$, $r_t := p_t$. Il s'ensuit dans les deux cas, que $G - \{i_{p_i}, i_{p_i - 1}\}$ est indécomposable par hypothèse de récurrence. Par construction de la classe $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$, $i_{p_i - 1} \in [X]$, $i_{p_i} \notin [X]$, où $X := S(G) - \{i_{p_i}, i_{p_i - 1}\}$, et $(i_{p_i - 1}, i_{p_i}) \not\equiv (i_{p_i - 1}, 0)$, donc G est indécomposable.

Soit $j \in \{1, \cdots, k\}$. Encore par construction de la classe $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$, pour tout $l \in \{1, \cdots, p_j - 1\}$, $\{j_{l-1}, j_{l+1}\}$ est un intervalle de $G - j_l$ et $S(G) - \{j_{p_j - 1}, j_{p_j}\}$ est un intervalle non trivial de $G - j_{p_j}$. De plus, si $\gamma \in S(G)$, alors $(S_{j_{p_j}}) - -(S(G - \gamma) - S_{j_{p_j}})$, et donc $S_{j_{p_j}}$ est un intervalle non trivial de $G - \gamma$. Il s'ensuit que tous les sommets de $G - 0$ sont des sommets critiques de G. Comme $G - \{j_{p_j}, j_{p_j - 1}\}$ est indécomposable, les arêtes de $\mathcal{A}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$ sont des arêtes de $I(G)$ d'après la remarque 4.3.8. Il s'ensuit d'après le lemme 4.2.1, que G est (-1)-critique en 0. De plus, lorsque $\gamma \in S(G)$, $S(G) - \{\gamma, j_{p_{j-1}}, j_{p_j}\}$ est un intervalle non trivial de $G - \{\gamma, j_{p_j}\}$, de sorte que d'après la proposition 4.2.1, γ est un sommet isolé de $I(G)$. Encore par la proposition 4.2.1, $I'(G) = \mathcal{A}(p_1, p_2, \cdots, p_k)$.

$\square$

Proposition 4.3.7. *Les graphes G d'ordre ≥ 7, (-1)-critiques en 0 et tels que $I'(G) =$*

$\mathcal{A}(2n_1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$ sont, aux complémentaires près, les graphes de la classe $\mathcal{H}(2n_1, 2n_2, \cdots, 2n_k)$.

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe (-1)-critique en 0 tel que $I'(G) = \mathcal{A}(2n_1, \cdots, 2n_k)$. Montrons que G ou $\overline{G}$ est un graphe de $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$. Notons que d'après la remarque 4.3.7 et le lemme 4.3.11, pour $i \in \{2, \cdots, k\}$, $(i_{2n_i}, i_{2n_i-2}) \equiv (1_{2n_1-2}, 1_{2n_1})$ et $(i_{2n_i-1}, i_{2n_i-2}) \equiv (1_{2n_1-2}, 1_{2n_1-1})$. D'autre part, pour $i \neq j \in \{2, \cdots, k\}$, $(1_{2n_1}, 1_{2n_1-2}) \equiv (1_{2n_1}, i_{2n_i}) \equiv (j_{2n_j}, i_{2n_i}) \equiv (j_{2n_j}, 1_{2n_1}) \equiv (1_{2n_1-2}, 1_{2n_1})$ et $(1_{2n_1-1}, 1_{2n_1-2}) \equiv (1_{2n_1-1}, i_{2n_i-1}) \equiv (j_{2n_j-1}, i_{2n_i-1}) \equiv (j_{2n_j-1}, 1_{2n_1-1}) \equiv (1_{2n_1-2}, 1_{2n_1-1})$. Les graphes $G(\{1_{2n_1-2}, 1_{2n_1}\})$ et $G(\{1_{2n_1-2}, 1_{2n_1-1}\})$ sont alors discrets ou complets. Quitte à remplacer G par $\overline{G}$, on peut supposer qu'ou bien $1_{2n_1-2} \longleftrightarrow 1_{2n_1}$ et $1_{2n_1-2} - -1_{2n_1-1}$, ou bien $1_{2n_1-2} - -\{1_{2n_1-1}, 1_{2n_1}\}$. Supposons d'abord que $1_{2n_1-2} \longleftrightarrow 1_{2n_1}$ et $1_{2n_1-2} - -1_{2n_1-1}$. Nous vérifions en utilisant la remarque 4.3.7 et le lemme 4.3.11, que $G(S(2n_1, \cdots, 2n_k))$ est un graphe de la classe $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$. Ce graphe étant indécomposable d'après le lemme 4.3.15, $G = G(S(2n_1, \cdots, 2n_k))$ d'après le corollaire 4.2.1. Supposons maintenant que $1_{2n_1-2} - -\{1_{2n_1-1}, 1_{2n_1}\}$. On a $0 - -(S(2n_1, \cdots, 2n_k) - \{0\})$. Comme G est indécomposable il existe $\gamma \in S(G) - S(2n_1, \cdots, 2n_k)$ tel que le graphe $G(\{0, \gamma\})$ est non discret. En utilisant encore la remarque 4.3.7 et du lemme 4.3.11, on vérifie que $G(S(2n_1, \cdots, 2n_k) \cup \{\gamma\})$ est un graphe de la classe $\mathcal{H}(2n_1, \cdots, 2n_k)$. Ce graphe étant indécomposable d'après le lemme 4.3.15, $G = G(S(2n_1, \cdots, 2n_k) \cup \{\gamma\})$ d'après le corollaire 4.2.1. $\square$

Chapitre 5

Inversion dans les tournois

Résumé.

Nous nous intéressons à l'opération, proposée par M. Pouzet, qui consiste à inverser une partie X de l'ensemble des sommets d'un tournoi T, c'est-à-dire, à inverser tous les arcs de T reliant deux sommets de X. Le tournoi obtenu à partir de T après l'inversion de ces arcs est noté $Inv(X, T)$. Pour une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$ de parties de sommets de T, le tournoi obtenu à partir de T en inversant successivement les parties $X_1, \cdots, X_m$, est noté $Inv((X_i)_{1 \leq i \leq m}, T)$. L'indice d'inversion (ou indice) d'un tournoi non transitif est, lorsqu'il existe, le plus petit entier $m := i(T)$ tel que $Inv((X_i)_{1 \leq i \leq m}, T)$ est un tournoi transitif. On convient que l'indice d'un tournoi transitif est nul. Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on désigne par $i(n)$ l'indice maximum d'un tournoi d'ordre n. Nous établissons que pour tout entier $n \geq 4$, $\frac{n-1}{2} - \log_2 n \leq i(n) \leq n-3$. Nous interprétons l'indice d'un tournoi fini T comme étant la distance minimum de T à un tournoi transitif défini sur $S(T)$. Nous montrons que la distance maximum entre deux tournois T et T' définis sur un même ensemble non vide S de n sommets, est égale à $n-1$. Une classe $\mathcal{C}$ de tournois finis est héréditaire si tout tournoi qui s'abrite dans un tournoi de $\mathcal{C}$ est encore un tournoi de $\mathcal{C}$. Une borne d'une telle classe $\mathcal{C}$ est un tournoi T n'appartenant pas à $\mathcal{C}$ et tel que pour tout sommet x de T, $T - x$ est un tournoi de $\mathcal{C}$. On désigne par $I_n^{<\omega}$ (resp. $I_n^{\leq\omega}$), la classe des tournois finis (resp. au plus dénombrables) T tels que $i(T) \leq n$. Nous montrons que la classe $I_n^{<\omega}$ est déterminée par ses bornes et que celles-ci sont en nombre fini. Nous explicitons les bornes de la classe $I_1^{<\omega}$ et nous donnons une description morphologique de cette classe. Enfin, nous construisons un tournoi universel de la classe $I_n^{\leq\omega}$, c'est-à-dire un tournoi de cette classe qui abrite tous les tournois de $I_n^{\leq\omega}$.

Mots clés : Abritement, Héréditaire, Indice d'inversion, Borne, Tournoi.

5.1 Préliminaires

Le formalisme relationnel nous semble plus adapté pour décrire et manipuler certains objets de ce chapitre.

5.1.1 Relations

Étant donnés un ensemble S, et un entier naturel non nul n, une *relation n-aire* de base S (ou sur S) est une application R de S^n dans $\{0,1\}$. L'entier n est appelé *arité* de la relation R. Une relation d'arité 1 (resp. 2) est dite *relation unaire* (resp. *relation binaire*). Pour une relation binaire R de base S et pour deux éléments $x, y \in S$, la notation xRy signifie que $R(x,y) = 1$. Une relation binaire R de base S est, *réflexive* lorsque pour tous $x \in S$, $R(x,x) = 1$, *irréflexive* lorsque pour tous $x \in S$, $R(x,x) = 0$, *complète* lorsque pour tous $x \neq y \in S$, $R(x,y) = 1$ ou $R(y,x) = 1$, *symétrique* lorsque pour tous $x, y \in S$, $R(x,y) = R(y,x)$, *antisymétrique* lorsque pour tous $x \neq y \in S$, $R(x,y) \neq R(y,x)$, *transitive* lorsque pour tous $x, y, z \in S$, si $R(x,y) = R(y,z) = 1$, alors $R(x,z) = 1$. Une *structure relationnelle* sur S, notée $(S,\ R_1, \cdots,\ R_m)$, est la donnée d'un ensemble S avec une suite $R_1, \cdots,\ R_m$ de m relations sur S, où $m \in \mathbb{N} - \{0\}$.

Soit R une relation n-aire de base S, et soit X une partie de S. La *restriction* de R

à X, notée $R/_X$ ou $R(X)$, est la relation n-aire de base X qui prend les mêmes valeurs que R pour chaque n-uplet d'éléments de X. De même, si $R := (S,\ R_1, \cdots,\ R_m)$ est une structure relationnelle, la restriction de R à une partie X de S, notée $R/_X$ ou $R(X)$, est définie par $R/_X := (X,\ R_1/_X, \cdots,\ R_m/_X)$.

Étant donnés deux relations R et R' de bases respectives S et S', et de même arité n, un *isomorphisme* de R sur R' (resp. un *plongement* de R dans R') est une application bijective (resp. injective) f de S dans S' telle que pour tout n-uplet $(x_1, \cdots,\ x_n) \in S^n$, $R(x_1, \cdots,\ x_n) = R'(f(x_1), \cdots f(x_n))$. Pour deux structures relationnelles $R := (S,\ R_1, \cdots,\ R_m)$ et $R' := (S',\ R'_1, \cdots,\ R'_m)$ un isomorphisme de R sur R' (resp. un *plongement* de R dans R') est une application bijective (resp. injective) f de S dans S' qui soit un isoporphisme (resp. un plongement) de R_i sur R'_i pour tout $i \in \{1, \cdots,\ m\}$.

Lorsqu'un isomorphisme de R sur R' existe, on dit que R et R' sont *isomorphes*, et on note $R \simeq R'$. Notons qu'un plongement de R dans R' est un isomorphisme de R sur une restriction de R'. Lorsqu'un tel plongement existe, R est isomorphe à une restriction de R', on dit que R' *abrite* R ou que R s'abrite dans R' et on note $R \leq R'$.

5.1.2 Graphes et tournois

Étant donné un graphe orienté $G := (S, A)$, on note aussi par A la relation binaire de base S associée au graphe G et définie par : $A(x, y) = 1$ si et seulement si $(x, y) \in A$. Pour tout graphe G, on pose $G(x, y) := A(G)(x, y)$. Nous identifions les graphes aux relations binaires qui leurs sont associées. Par exemple, un graphe symétrique est un graphe dont la relation binaire associée est symétrique. Un tournoi est un graphe orienté $T := (S, A)$, tel que pour tous $x \neq y \in S$, $T(x, y) \neq T(y, x)$. La relation binaire A, associée au tournoi T, est appelée relation de tournoi. Une relation de tournoi est alors une relation complète, irréflexive, antisymétrique et transitive : il s'agit d'une relation d'*ordre total strict*. Un tournoi T est fini (resp. dénombrable) lorsque $S(T)$ est fini (resp. dénombrable). Les notions d'isomorphisme, de plongement et d'abritement entre deux tournois T et T' sont ceux entre leurs relations binaires associées. Le *score* d'un sommet x (dans T), noté $s_T(x)$, est le cardinal de $V_T^+(x) := \{y \in S(T) : (x, y) \in A(T)\}$. Un tournoi fini T est *régulier* si tous ses sommets ont le même score.

5.1.3 Présentation des résultats

Nous rappelons l'opération d'inversion, introduite au chapitre 1. Une inversion d'un arc $a := (x, y)$ dans un tournoi T est l'opération qui consiste à remplacer (dans

T) l'arc a par $a^\star := (y, x)$. Le tournoi obtenu à partir de T après l'inversion d'un tel arc est noté $Inv(\{x, y\}$,T). Nous nous intéressons, dans ce chapitre, à une autre variante d'inversion proposée par le professeur M. Pouzet. Il s'agit de l'opération qui consiste à inverser dans un tournoi $T = (S, A)$, une partie $X \subseteq S$, c'est-à-dire à inverser tous les arcs $(x, y) \in A$ tels que x et y sont dans X. Le tournoi obtenu à partir du tournoi T après l'inversion d'une telle partie X est noté $Inv(X, T)$. Par exemple, lorsque $\mid X \mid\leq 1$, $Inv(X, T) = T$; lorsque $\mid X \mid= 2$, l'opération revient à l'inversion d'un seul arc de T ; lorsque $X = S$, $Inv(X, T) = Inv(S, T) = T^\star$. Pour une suite finie $(X_i)_{1\leq i\leq m}$ de parties de $S(T)$, le tournoi obtenu à partir de T en inversant successivement les parties $X_1, \cdots,\ X_m$, est noté $Inv((X_i)_{1\leq i\leq m}, T)$ ou $Inv((X_1, \cdots,\ X_m), T)$. Par exemple, un *switch* [12] d'un tournoi $T = (S, A)$ est un tournoi obtenu à partir de T en inversant, pour $X \subseteq S$, les arcs $(x, y) \in A$ tels que $x \in X$ et $y \in S - X$. Il s'ensuit que les switchs de T sont les tournois $Inv((X, S - X, S), T)$, où $X \subseteq S$. Remarquons que pour toute permutation σ de $\{1, \cdots,\ m\}$, $Inv((X_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq m}, T) = Inv((X_i)_{1\leq i\leq m}, T)$. Comme, pour $X \subseteq S(T)$, $Inv((X, X), T) = T$, nous pouvons nous limiter à des suites d'inversions de parties $X_1, \cdots,\ X_m$ deux à deux distinctes de $S(T)$. Comme de plus l'ordre d'inversion des parties distinctes X_i ne change pas le tournoi obtenu, nous pouvons adopter une notation ensembliste en posant $Inv(\{X_i : 1 \leq i \leq m\}, T) := Inv((X_i)_{1 \leq i \leq m}, T)$. Ceci définit alors $Inv(\chi, T)$ pour une partie finie χ de $\mathcal{P}(S(T))$. L'*indice d'inversion* (ou indice) d'un tournoi non transitif est, lorsqu'il existe, le plus petit entier $m := i(T)$ tel que $Inv((X_i)_{1 \leq i \leq m}, T)$ est un tournoi transitif. On convient que l'indice d'un tournoi transitif est nul. Notons que $i(T)$ existe toujours lorsque le tournoi T est fini. Plus généralement $i(T)$ existe si et seulement si il existe un suite finie F de parties de $S(T)$, telle que le tournoi $Inv(F, T)$ est transitif. Lorsque $i(T)$ n'existe pas, on dit que T est d'indice infini. P. Slater [31] s'est intéressé, dans le cas d'un tournoi fini T, au nombre minimum d'arcs qu'il faut inverser dans un tel tournoi pour le ramener à un tournoi transitif. Ce nombre, noté $s(T)$, est appelé *indice de Slater* de T, et un tournoi transitif obtenu à partir de T après inversion d'un tel nombre d'arcs est appelé *ordre médian* ou *ordre de Slater* de T. Il me paraît alors d'usage, comme me l'a suggéré le professeur A. Bondy, d'appeler *indice de Pouzet* de T, l'indice d'un tournoi T. Pour un tournoi fini T, il est clair que $i(T) \leq s(T)$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $i(n)$ (resp. $s(n)$), l'indice de Pouzet (resp. l'indice de Slater) maximum d'un tournoi d'ordre n. P. Erdös et J.W. Moon [14] ont montré que $s(n) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor < \frac{n(n-1)}{4}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x. J.C. Bermond [7] a démontré que $s(n) \geq \lfloor \frac{n}{3} \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \rfloor$. On sait aussi que $s(n)$ est de l'ordre de $\frac{n^2}{4}$ [14]. Nous établissons l'encadrement suivant de $i(n)$.

Théorème 5.1.1. *Pour tout entier* $n \geq 4$, $\frac{n-1}{2} - \log_2 n \leq i(n) \leq n-3$.

Nous remarquons alors que $i(n)$ est d'ordre linéaire, tandis que $s(n)$ est d'ordre quadratique.

Il est connu que l'indice de Slater d'un tournoi fini T est la *distance de Slater* minimum du tournoi T à un tournoi transitif défini sur $S(T)$. Afin d'introduire cette distance, nous désignons par $\mathcal{T}_S$, l'ensemble des tournois définis sur un ensemble fini S. La distance de Slater est définie sur $\mathcal{T}_S$ comme suit. Pour tous tournois $T, T' \in \mathcal{T}_S$, la distance de Slater entre T et T' est le nombre des arcs de T qui ne sont pas des arcs de T'. La distance de Slater maximum entre deux tournois de $\mathcal{T}_S$ est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$, où $n = \mid S \mid$. Ce maximum est réalisé par la distance de Slater entre un tournoi de $\mathcal{T}_S$ et son dual.

Nous introduisons de même une distance d sur $\mathcal{T}_S$ correspondant à notre inversion. Nous appelons cette distance d, *distance d'inversion* ou *distance de Pouzet* et nous la définissons comme suit. Pour deux tournois distincts T et T' de $\mathcal{T}_S$, $d(T,T) = 0$ et $d(T,T')$ est le plus petit nombre de parties qu'il faut inverser dans le tournoi T pour le ramener au tournoi T'. L'indice de Pouzet d'un tournoi fini T est alors la distance de Pouzet minimum de T à un tournoi transitif défini sur $S(T)$. À tout tournoi fini défini sur un ensemble non vide S de n sommets, et à toute bijection

$\sigma : \{1, \cdots, n\} \mapsto S$, nous assosions le tournoi T_σ défini sur S comme suit. Pour tous $i \neq j \in \{1, \cdots, n\}$, $T_\sigma(\sigma(i), \sigma(j)) = T(\sigma(i), \sigma(j))$ si et seulement si $\mid i - j \mid \neq 1$. Nous montrons le théorème suivant.

Théorème 5.1.2. *Pour tous tournois finis T et T' définis sur un même ensemble non vide S de n sommets, $d(T, T') \leq n-1$. De plus, pour toute bijection $\sigma : \{1, \cdots, n\} \mapsto S$, $d(T, T_\sigma) = n - 1$.*

Notons que ce théorème a pour conséquence que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $i(n) \leq n - 1$.

Étant donné un tournoi T d'indice fini, un tournoi transitif obtenu à partir de T en inversant $i(T)$ parties de $S(T)$ est appelé *ordre critique* de T. Il est clair que si $Inv((X_i)_{1 \leq i \leq i(T)}, T)$ est un ordre critique de T, alors les parties X_i sont de cardinal au moins 2 et elles sont deux à deux distinctes. Nous appelons alors *ensemble transcritique* de T, tout ensemble F de $i(T)$ parties de $S(T)$, tel que $Inv(F, T)$ est un ordre critique du tournoi T.

Notons les remarques suivantes.

Remarque 5.1.1. *Soit T un tournoi d'indice fini. Si le tournoi $Inv((X_i)_{1 \leq i \leq m}, T)$ est transitif, il en est de même pour le tournoi $Inv((X_i \cap X)_{1 \leq i \leq m}, T(X))$, où $X \subseteq S(T)$. En particulier, si $T' \leq T$, alors $i(T') \leq i(T)$.*

Rappelons qu'une classe $\mathcal{C}$ de tournois est dite héréditaire ou *close pour l'abritement* si tout tournoi qui s'abrite dans un tournoi de $\mathcal{C}$ est encore un tournoi de $\mathcal{C}$. Si B est une classe de tournois finis, on désigne par $Forb(B)$ la classe des tournois finis omettant chacun des tournois de B. Il s'agit clairement d'une classe héréditaire. En fait, toute classe héréditaire peut être obtenue de cette façon.

Une *borne* d'une classe héréditaire $\mathcal{C}$ est un tournoi T n'appartenant pas à $\mathcal{C}$ et tel que pour tout $x \in S(T)$, $T - x$ est un tournoi de $\mathcal{C}$. On désigne par $B(\mathcal{C})$ la classe des bornes de $\mathcal{C}$ considérées à des isomorphismes près. On dit que la classe $\mathcal{C}$ est déterminée par ses bornes lorsque $\mathcal{C} = Forb(B(\mathcal{C}))$. Le résultat suivant est un cas particulier d'un résultat plus général pour des classes de relations [15].

Lemme 5.1.1. *Toute classe héréditaire de tournois finis est déterminée par ses bornes.*

Preuve. Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de tournois finis. Il est clair que $\mathcal{C} \subseteq Forb(B(\mathcal{C}))$. Supposons que $\mathcal{C} \neq Forb(B(\mathcal{C}))$. Nous considérons alors un tournoi T de cardinal minimum de la classe $Forb(B(\mathcal{C})) - \mathcal{C}$. Clairement T est une borne de $\mathcal{C}$, contradiction.

$\square$

On désigne par $I_n^{<\omega}$ (resp. $I_n^{\leq\omega}$), où $n \in \mathbb{N}$, la classe des tournois finis (resp. au plus dénombrables) T tels que $i(T) \leq n$. Par exemple $I_0^{<\omega}$ est la classe des tournois finis transitifs. Notons que les classes $I_n^{<\omega}$ et $I_n^{\leq\omega}$ sont héréditaires. Nous montrons le théorème suivant.

Théorème 5.1.3. *Pour chaque entier n, la classe $I_n^{<\omega}$ est une sous-classe stricte de la classe des tournois finis. De plus, $I_n^{<\omega}$ est déterminée par ses bornes, et celles-ci sont, à des isomorphismes près, en nombre fini.*

Ensuite, pour $n = 1$, nous explicitons les bornes de la classe $I_1^{<\omega}$ et nous donnons une description morphologique de cette classe.

Enfin, nous construisons un tournoi universel de la classe $I_n^{\leq\omega}$, c'est-à-dire un tournoi de cette classe qui abrite tous les tournois de la classe.

5.1.4 Décomposition de Gallai

Étant donné un tournoi $T := (S, A)$, on dit que T est *fortement connexe* si pour tout couple (x, y) de sommets distincts de T, il existe une suite $x_0 := x, \cdots,\ x_m := y$ de sommets de T tels que pour tout $i \in \mathbb{N}_{m-1}$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$. Remarquons que tout tournoi indécomposable à au moins trois sommets est fortement connexe.

Nous rappelons les notions de somme lexicographique et de *dilatation*. Soit $T := (S, A)$ un tournoi non vide. Pour tout $i \in S$, on considère un tournoi $T_i := (S_i, A_i)$. Lorsque les S_i sont mutuellement disjoints, on construit le tournoi $T((T_i)_{i\in S})$ défini sur $\bigcup_{i\in S} S_i$ comme suit. Pour tous $x \neq y \in \bigcup_{i\in S} S_i$, (x, y) est un arc de $T((T_i)_{i\in S})$ si et seulement si, ou bien (x, y) est un arc de l'un des T_i, ou bien $x \in S_i$, $y \in S_j$, où $i \neq j \in S$, et (i, j) est un arc de T. Le tournoi $T((T_i)_{i \in S})$ est la somme lexicographique des T_i (suivant le tournoi T), encore appelé la T-somme des tournois $(T_i)_{i \in S}$. Lorsque $S = \mathbb{N}_m$, où $m \in \mathbb{N}$, $T((T_i)_{i \in S})$ est aussi noté $T(T_0, \cdots, T_m)$. On dit aussi que $T((T_i)_{i \in S})$ est un dilaté du tournoi T. Plus généralement, lorsque $S_i \cap (S - \{i\}) = \emptyset$, le tournoi dilaté de T en le sommet $i \in S$ par le tournoi T_i, noté $T(T_i)$, est le tournoi dont l'ensemble des sommets est $(S - \{i\}) \cup S_i$, tel que les arcs de T_i et de $T - i$ sont des arcs de $T(T_i)$, et tel que pour tout $(x, y) \in (S - \{i\}) \times S_i$, (x, y) est un arc de $T(T_i)$ si et seulement si (x, i) est un arc de T. On définit de même le dilaté de T en un ensemble I de sommets de S, par des tournois $(T_i)_{i \in I}$. Un tel tournoi est noté $T((T_i)_{i \in I})$.

Le théorème suivant, dû à T. Gallai [17], assure l'existence d'une forme de "décomposition canonique" des tournois finis.

Théorème 5.1.4 ([17]). – *Tout tournoi fortement connexe et fini à au moins 3 sommets, s'écrit sous la forme d'une T-somme $T(T_0, \cdots, T_n)$, où T est un tournoi indécomposable sur $\mathbb{N}_n$, les T_i sont des tournois finis et non vides et $n \geq 2$.*

– *Tout tournoi fini et non fortement connexe s'écrit sous la forme d'une $\mathcal{O}_n$-somme $\mathcal{O}_n(T_0, \cdots, T_{n-1})$, où les T_i sont des tournois finis, non vides et fortement connexes et $n \geq 2$.*

5.1.5 Tournois critiques et théorème de Latka

Un tournoi *critique* est un tournoi T indécomposable et fini à au moins 5 sommets tel que pour tout $x \in S(T)$, le tournoi $T - x$ est décomposable. Afin de rappeler la caractérisation des tournois critiques, nous introduisons, pour tout entier $n \geq 1$, les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1} définis sur $\mathbb{N}_{2n}$, où $n \geq 1$, comme suit.

1. $U_{2n+1} := Inv(\{2i : 0 \leq i \leq n\}, \mathcal{O}_{2n+1})$.
2. $T_{2n+1} := Inv(\{2i - 1 : 1 \leq i \leq n\}, U_{2n+1})$.
3. $V_{2n+1} := Inv(\{2i : 0 \leq i \leq n - 1\}, U_{2n+1})$.

Remarquons que les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1} sont ceux introduits au premier chapitre, à la différence que dans ce chapitre, il est commode de les considérer aussi pour $n = 1$. Notons alors que $T_3 = U_3 = V_3 = C_3$.

Rappelons que les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1}, et V_{2n+1} sont autoduaux. Les tournois T_{2n+1} sont réguliers. Les suites $(T_{2n+1})_{n\geq 1}$, $(U_{2n+1})_{n\geq 1}$ et $(V_{2n+1})_{n\geq 1}$ sont strictement croissantes pour l'ordre de l'abritement. Les tournois U_{2n+1} interviennent dans notre description morphologique de la classe $I_1^{<\omega}$. Notons que pour $n \geq 2$ et pour $k \in \mathbb{N}_{2n-1}$, $U_{2n+1} - \{k, k+1\} \simeq U_{2n-1}$.

Proposition 5.1.1 ([30])**.** *À des isomorphismes près, les tournois critiques sont les tournois T_{2n+1}, U_{2n+1} et V_{2n+1}, où $n \geq 2$.*

Notons alors le fait suivant.

Remarque 5.1.2. *Les quatres tournois d'ordre 4 sont bien dans la classe* $I_1^{<\omega}$. *Ces 4 tournois étant décomposables, les tournois indécomposables d'ordre 5 sont, à des isomorphismes près, les tournois critiques* T_5, U_5 *et* V_5.

Le théorème de Latka [24] consiste en une caractérisation des tournois finis, indécomposables et n'abritant pas V_5.

Afin de rappeler cette caractérisation, nous introduisons le tournoi de *Paley* P_7 défini sur $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ par $A(P_7) := \{(i,j) : j - i \in \{1,2,4\}\}$. Notons que les tournois obtenus à partir de P_7 par la suppression d'un sommet quelconque sont isomorphes et posons $B_6 := P_7 - 7$. Notons de même que les tournois obtenus à partir de P_7 en supprimant deux sommets quelconques sont isomorphes à U_5.

Théorème 5.1.5 ([24]). *À des isomorphismes près, les tournois indécomposables, finis à au moins 5 sommets et omettant* V_5 *sont les tournois* B_6, P_7, U_{2n+1} *et* T_{2n+1}, *où* $n \geq 2$.

5.2 Preuve du théorème 5.1.1

Pour la borne supérieure du théorème 5.1.1, j'utilise un procédé d'inversion qui m'a été communiqué oralement par le professeur S. Thomassé. La borne inférieure du théorème découle de la proposition suivante qui assure, en outre, l'existence d'un tournoi fini d'indice arbitraire.

Proposition 5.2.1. *Pour tout entier N, il existe un tournoi fini T tel que $i(T) = N$. De plus, un tel tournoi T peut être pris d'ordre m, lorsque $2^{\binom{m}{2}} > m!\binom{2m}{N-1}$.*

Preuve. Pour $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, nous désignons par $\mathcal{T}(n)$ l'ensemble des tournois d'ordre n définis sur $\mathbb{N}_{n-1}$, et par $t(n)$ le nombre de tournois de $\mathcal{T}(n)$. On a :

$$t(n) = 2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{5.1}$$

Soit $N \in \mathbb{N} - \{0\}$. On pose $\mathcal{T}(n, N) := \{T \in \mathcal{T}(n) : i(T) < N\}$ et on désigne par $t(n, N)$ le nombre de tournois de $\mathcal{T}(n, N)$. Tout tournoi de $\mathcal{T}(n, N)$ est isomorphe à un tournoi de la forme $Inv(U, \mathcal{O}_n)$, où $U := \{U_i : 1 \leq i \leq k\}$ est un ensemble de k parties distinctes à au moins deux éléments de $\mathbb{N}_{n-1}$, avec $k < N$. Il s'ensuit que $t(n, N) \leq \sum_{i=1}^{N-1} \binom{2^n - n - 1}{i}$. Nous prenons $n \geq N$. Quitte à compléter l'ensemble U par des singletons distincts de $\mathbb{N}_{n-1}$, nous pouvons supposer que $k = N - 1$ et donc $U = \{U_i : 1 \leq i \leq N - 1\}$. Comme le nombre de parties de $\mathbb{N}_{n-1}$ est égal à 2^n, et comme pour chaque tournoi T de $\mathcal{T}(n)$, il existe au plus $n!$ tournois de $\mathcal{T}(n)$, isomorphes à T, on a :

$$t(n, N) \leq n!\binom{2^n}{N-1}. \tag{5.2}$$

Or, $\binom{2^n}{N-1} \leq 2^{n(N-1)}$ et $\frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!2^{n(N-1)}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Il s'ensuit, en utilisant (5.1) et (5.2), que $\frac{t(n)}{t(n,N)} \geq \frac{2^{\binom{n}{2}}}{n!\binom{2^n}{N-1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Il existe alors un entier m tel que $2^{\binom{m}{2}} > m!\binom{2^m}{N-1}$, et pour un tel m, il existe un tournoi T d'ordre m tel que $i(T) := N' \geq N$. On a $T \simeq Inv((X_i)_{1\leq i\leq N'}, \mathcal{O}_m)$, où $(X_i)_{1\leq i\leq N'}$ est une suite de N' parties de $S(T)$. Il suffit de remarquer que lorsque $N' > N$, $i(T') = N$, où $T' := Inv((X_i)_{1\leq i\leq N'-N}, T)$. Sinon, comme $Inv((X_i)_{N'-N+1\leq i\leq N'}, T') \simeq \mathcal{O}_m$, alors $i(T') \leq N-1$, et puisque $T = Inv((X_i)_{1\leq i\leq N'-N}, T')$, alors $i(T) \leq N'-1$. Contradiction.

□

Corollaire 5.2.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, $i(n) \geq \frac{n-1}{2} - \log_2 n$.*

Preuve. Soient i et n des entiers avec $1 \leq i \leq n$. D'après la proposition 5.2.1, la condition $\frac{n(n-1)}{2} > \log_2(n!\binom{2^n}{i-1})$ est une condition suffisante pour qu'il existe un tournoi d'ordre n et d'indice i. En utilisant les inégalités $\binom{2^n}{i-1} \leq \frac{2^{n(i-1)}}{(i-1)!}$ et $\frac{n!}{(i-1)!} \leq n^{n-i+1}$, la condition ci-dessus est satisfaite lorsque $\frac{n(n-1)}{2} > n(i-1)+(n-i+1)\log_2 n$. Cette dernière inégalité équivaut à : $i < \frac{n(n+1)-2\log_2 n - 2n\log_2 n}{2n-2\log_2 n}$. Comme $\frac{n-1}{2} - \log_2 n < \frac{n+1}{2} - \log_2 n - \frac{\log_2 n}{n} \leq \frac{n(n+1)-2\log_2 n-2n\log_2 n}{2n-2\log_2 n}$, il s'ensuit que $i(n) \geq \frac{n-1}{2} - \log_2 n$.

□

Preuve du théorème 5.1.1

La borne inférieure a fait l'objet du corollaire 5.2.1. Nous montrons, par récurrence, que pour $n \geq 4$, $i(n) \leq n-3$. Le résultat est vrai pour $n = 4$. En effet, à des isomorphismes près, les tournois à 4 sommets sont au nombre de quatre et chacun de ces quatre tournois est d'indice 0 ou 1. Soit alors un tournoi T d'ordre $n \geq 5$. On prend un sommet x de T et on pose $T' = Inv(V_T^-(x), T)$. D'une part $i(T) \leq i(T')+1$, d'autre part $i(T') = i(T'-x)$. Comme par hypothèse de récurrence $i(T'-x) \leq n-4$, alors $i(T) \leq n-3$. Il s'ensuit que $i(n) \leq n-3$.

□

Notons que nous pouvons améliorer de 1 la borne supérieure de $i(n)$: pour tout $n \geq 6$, $i(n) \leq n-4$. Pour cela, il suffit de reprendre la preuve ci-dessus en vérifiant que les tournois à 6 sommets sont d'indice ≤ 2. À des isomorphisme près les tournois à 6 sommets sont au nombre de 56 dont exactement 15 sont indécomposables. Ces 56 tournois sont indiqués sans mention de l'indécomposabilité dans [26]. Nous pouvons les retrouver de la façon suivante. Le théorème 5.1.5 permet de construire les 14 tournois indécomposables à 6 sommets, autres que B_6, en partant de V_5. Nous construisons les 41 tournois décomposables à 6 sommets en utilisant le théorème 5.1.4.

5.3 Dimension binaire et preuve du théorème 5.1.2

Nous reformulons la distance de Pouzet en termes de dimension binaire d'un graphe. Nous introduisons alors les notions suivantes. Notons d'abord que nous identifions chaque graphe simple $G := (S, A)$, au graphe symétrique, noté aussi par G, et défini sur S comme suit. Pour tous $x \neq y \in S$, $G(x, y) = 1$ si et seulement si $\{x, y\} \in A$.

Étant donnés k graphes $G_1, \cdots, G_k$ ($k \in \mathbb{N} - \{0\}$) définis sur un même ensemble S de sommets, la *somme booléenne* des G_i, notée $G_1 \dot{+} \cdots \dot{+} G_k$ ou $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} G_i$, est le graphe défini sur S de la façon suivante. Pour tous $x, y \in S$, $(\displaystyle\sum_{i=1}^{k} G_i)(x, y) := \displaystyle\sum_{i=1}^{k} G_i(x, y)$, où les sommes sont prises modulo 2. Remarquons que l'ensemble des graphes définis sur un même ensemble donné de sommets, muni de la somme booléenne, est un groupe abélien ayant le graphe discret (c'est-à-dire sans arcs) pour élément neutre.

Soit G un graphe simple et soit E un ensemble fini. Une *représentation binaire* du graphe G dans l'ensemble E, est une application f de S dans l'ensemble des parties de E, telle que pour tous $x \neq y \in S(G)$, $\{x, y\} \in A(G)$ si et seulement si $\mid f(x) \cap f(y) \mid$ est impair.

Fait 5.3.1. *Tout graphe simple admet une représentation binaire.*

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe simple. Nous montrons que le graphe G admet une reprérentation binaire f dans l'ensemble A de ses arêtes. Pour tout $x \in S$, on pose $f(x) := \{a \in A : x \in a\}$. Soient x et y deux sommets distincts de G. Si $\{x, y\} \in A$, alors $f(x) \cap f(y)$ est égal au singleton $\{\{x, y\}\}$, et donc $\mid f(x) \cap f(y) \mid$ est impair puisque $\mid f(x) \cap f(y) \mid = 1$. Réciproquement, si $\{x, y\} \notin A$, alors $f(x) \cap f(y) = \emptyset$ donc $\mid f(x) \cap f(y) \mid$ est pair.

□

La *dimension binaire* d'un graphe simple G est alors le plus petit entier $b(G)$ tel que G admet une représentation binaire dans un ensemble de cardinal $b(G)$. Par exemple, les graphes simples de dimension binaire 0 sont les graphes discrets. Lorsque le graphe G n'est pas discret, toute représentation binaire de G est forcément dans un ensemble E non vide.

On peut reformuler la notion de représentation binaire de G dans E, à l'aide du corps $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, muni de l'addition modulo 2 et de la multiplication usuelle, comme suit. On pose $\mid E \mid = m$ et nous considérons l'ensemble $\mathbb{F}_2^m$ muni de sa structure usuelle d'espace vectoriel de dimension m sur $\mathbb{F}_2$ (lorsque $m = 0$, on convient que $\mathbb{F}_2^m = \mathbb{F}_2^0$ est l'espace vectoriel constitué du seul vecteur 0). On définit alors sur $\mathbb{F}_2^m$, le produit scalaire, noté $|$, comme suit. Pour $m \geq 1$ et pour tous vecteurs $u := (u_1, \cdots, u_m)$

et $v := (v_1, \cdots, v_m)$ de $\mathbb{F}_2^m$, $u \mid v := \sum_{i=1}^{m} u_i v_i$ (pour $m = 0$, le produit scalaire étant évidemment $0 \mid 0 = 0$). On considère maintenant la bijection ω de l'ensemble des parties de E dans $\mathbb{F}_2^m$, définie comme suit : Pour $m \geq 1$ et pour $X \subseteq E := \{e_1, \cdots, e_m\}$, $\omega(X) := (x_1, \cdots, x_m) \in \mathbb{F}_2^m$, où $x_i = 1$ si et seulement si $e_i \in X$. En identifiant chaque partie $X \subseteq E$ au vecteur $\omega(X) \in \mathbb{F}_2^m$, une représentation binaire de G dans E (ou dans $\mathbb{F}_2^m$), est alors une application f de S dans $\mathbb{F}_2^m$, telle que pour tous $x \neq y \in S$, $\{x, y\} \in A(G)$ si et seulement si $f(x) \mid f(y) = 1$. La dimension binaire d'un graphe G est ainsi le plus entier m tel que G admet une représentation binaire dans $\mathbb{F}_2^m$. Du fait de la structure algébrique qu'elle comporte, cette deuxième formulation de la représentation binaire, a l'avantage de permettre d'utiliser des résultats d'algèbre. Une telle formulation nous fournit alors un supplément d'outils pour la preuve de certains faits. Nous l'utilisons pour le calcul de la dimension binaire du chemin P_n de longueur $n-1$. Nous rappelons alors que P_n est défini sur $\mathbb{N}_{n-1}$, comme suit. Pour tous i, $j \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\{i, j\}$ est une arête de P_n si $\mid i - j \mid = 1$.

Proposition 5.3.1. *Pour tout graphe simple G d'ordre $n \geq 1$, $b(G) \leq n-1$. De plus, cette borne est atteinte par le chemin P_n à n sommets, c'est-à-dire $b(P_n) = n-1$.*

Preuve. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 1$, le graphe simple à un seul sommet admet une représentation binaire dans $\emptyset$. Soit un graphe $G := (S, A)$

d'ordre $n+1$, où $n \geq 1$, et soit $\alpha \in S$. On considère le graphe $H_\alpha := (G-\alpha) \dot{+} K_\alpha$, où K_α est le graphe simple défini sur $S-\{\alpha\}$ par $A(K_\alpha) := \mathcal{P}_2(V_G(\alpha))$. Par hypothèse de récurrence, $b(H_\alpha) \leq n-1$. Il s'ensuit que H_α admet une représentation binaire f sur un ensemble E de cardinal $\leq n-1$. On peut supposer que $\alpha \notin E$. On considère alors l' application g de S dans $E \cup \{\alpha\}$, définie comme suit : $g(\alpha) := \{\alpha\}$, $g(x) := f(x)$ si $x \in S - (V_G(\alpha) \cup \{\alpha\})$, et $g(x) := f(x) \cup \{\alpha\}$ si $x \in V_G(\alpha)$. On vérifie que g est une représentation binaire de G dans l'ensemble $E \cup \{\alpha\}$. Il s'ensuit que $b(G) \leq | E \cup \{\alpha\} | \leq n$.

Il reste à montrer que $b(P_n) = n-1$. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que $b(P_n) \geq n-1$. On a $b(P_1) = 0$ car le graphe P_1 est discret. On a aussi $b(P_2) = 1$ car le graphe P_2 n'est pas discret et car l'application f, définie par $f(0) := f(1) := E$, est une représentation binaire de P_2 dans un ensemble E de cardinal 1. Soit alors un entier $n \geq 2$ et soit h une représentation binaire de P_n dans $\mathbb{F}_2^m$. Nous considérons la famille $\mathcal{F}$ formée des $n-1$ vecteurs $h(0), \cdots, h(n-2)$. Il suffit de montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre. En effet, dans ce cas, comme l'espace vectoriel $\mathbb{F}_2^m$ est de dimension m, alors $m \geq n-1$. Supposons alors par l'absurde que la famille $\mathcal{F}$ est liée. Il existe alors des scalaires non tous nuls $a_0, \cdots, a_{n-2} \in \mathbb{F}_2$, tels que $\sum_{i=0}^{n-2} a_i h(i) = 0$. Soit k le plus grand entier i tel que $a_i \neq 0$. On a alors $k < n-1$ et $\sum_{i=0}^{k} a_i h(i) \mid h(k+1) = 0$. Or, pour $i < k$, $h(i) \mid h(k+1) = 0$ car $\{i, k+1\} \notin A(P_n)$. Il s'ensuit que $\sum_{i=0}^{k} a_i h(i) \mid h(k+1) = a_k h(k) \mid h(k+1) = 0$. Comme $h(k) \mid h(k+1) = 1$ car $\{k, k+1\} \in A(P_n)$, alors $a_k = 0$, ce qui contredit la définition de l'entier k.

$\square$

La notion de dimension binaire peut être formulée en termes de *cliques* comme suit. Rappelons d'abord q'une clique d'un graphe simple G est un sous-graphe complet de G. Une $\star$-*clique* est un graphe non discret dans lequel les sommets non isolés forment une clique. Plus précisément, une $\star$-clique est un graphe simple $G := (S, A)$ tel que $A := \mathcal{P}_2(X)$, où $X \subseteq S$ et $\mid X \mid \geq 2$. Pour $X \subseteq S$, nous désignons par K_X^S le graphe simple ayant S pour ensemble de sommets et telle $A(K_X^S) := \mathcal{P}_2(X)$. Lorsque $\mid X \mid \geq 2$, K_X^S est une $\star$-clique. Soit $G := (S, A)$ un graphe non discret. Remarquons que G s'écrit sous la forme d'une somme booléenne d'au plus $\mid A \mid$ $\star$-cliques. En effet, il suffit de constater que $G = \sum_{a \in A} K_a^S$. On désigne alors par $c(G)$ le plus petit entier k tel que G est une somme booléenne de k $\star$-cliques. Lorsque le graphe G est discret, on pose $c(G) := 0$.

Proposition 5.3.2. *Pour tout graphe simple G, on a $c(G) = b(G)$.*

Preuve. Soit $G := (S, A)$ un graphe simple. Si le graphe G est discret, on a bien $c(G) = b(G) = 0$. Nous supposons alors que le graphe G n'est pas discret. Supposons d'abord que G est la somme booléenne de m $\star$-cliques $K^S_{X_1}, \cdots, K^S_{X_m}$. Pour tout $x \in S$, on pose $f(x) := \{i \in \{1, \cdots, m\} : x \in X_i\}$. Soient x et y deux sommets distincts de G. On a $f(x) \cap f(y) = \{i \in \{1, \cdots, m\} : \{x, y\} \subseteq X_i\}$. Il est alors clair que $\{x, y\} \in A$ si et seulement si $\mid f(x) \cap f(y) \mid$ est impair. Ainsi, f est une représentation binaire de G dans l'ensemble $\{1, \cdots, m\}$ de cardinal m. Il s'ensuit que $b(G) \leq c(G)$. Réciproquement, supposons que G admet une représentation binaire h dans un ensemble $E := \{e_1, \cdots, e_m\}$ à m éléments. Pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$, on pose $Y_i := \{x \in S : e_i \in h(x)\}$. On a $G = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} K^S_{Y_i}$. En effet, pour tous $x \neq y \in S$ et pour tout $i \in \{1, \cdots, m\}$, $K^S_{Y_i}(x, y) = 1$ si et seulement si $e_i \in h(x) \cap h(y)$. Il s'ensuit que $\displaystyle\sum_{i \in I} K^S_{Y_i}(x, y) = 1$ si et seulement si $\mid h(x) \cap h(y) \mid$ est impair, c'est-à-dire $G(x, y) = 1$. Comme $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} K^S_{Y_i} = \sum_{i \in I} K^S_{Y_i}$, où $I := \{i \in \{1, \cdots, m\} :\mid Y_i \mid\geq 2\}$, alors G est la somme booléenne d'au plus m $\star$-cliques. Il s'ensuit que $c(G) \leq b(G)$.

$\square$

Notons alors le fait suivant.

Fait 5.3.2. *Étant donné deux tournois finis T et T' définis sur un même ensemble non vide S de sommets, on a $d(T, T') = b(T \dot{+} T')$.*

Preuve. D'après la proposition 5.3.2, il suffit de vérifier que $d(T,T') = c(T \dot{+} T')$. Pour cela, il suffit de remarquer que pour k parties $X_1, \cdots, X_k$ de S, $Inv((X_i)_{1\leq i\leq k}, T) = T'$ si et seulement si $T \dot{+} T' = \sum_{i=1}^{k} K_{X_i}^S$.

$\square$

Preuve du théorème 5.1.2

Soient T et T' deux tournois définis sur un même ensemble non vide S de n sommets. Comme $d(T,T') = b(T \dot{+} T')$ d'après le fait 5.3.2, alors $d(T,T') \leq n-1$ d'après la proposition 5.3.1. De plus, pour toute bijection $\sigma : \{1, \cdots, n\} \mapsto S$, $d(T, T_\sigma) = n-1$ car $T \dot{+} T_\sigma \simeq P_n$ et $b(P_n) = n-1$ d'après la proposition 5.3.1.

$\square$

5.4 Indice de Pouzet de quelques tournois

On note $\mathbb{1}(x)$ le tournoi ayant x pour seul sommet, et on note $C(x,y,z)$ le 3-cycle $(\{x,y,z\}, \{(x,y),(y,z),(z,x)\})$. Outre le tournoi B_6 et les tournois critiques dont nous déterminerons les indices, nous introduisons les tournois suivants.

- $D_5 := C_3(C_3, \mathbb{1}(3), \mathbb{1}(4))$.
- $C_6 := \mathcal{O}_2(C_3, C(3,4,5))$.

Lemme 5.4.1. *$i(D_5) = 2$.*

Preuve. Le tournoi D_5 est non transitif et $Inv(\{\{1,2\},\{3,4\}\},D_5) = 4 < 2 < 0 < 1 < 3$. Il s'ensuit que $1 \leq i(D_5) \leq 2$. Si $i(D_5) = 1$, il existe $X \subset \mathbb{N}_4$ tel que $Inv(X, D_5)$ est un tournoi transitif. Forcément $\mid X \cap \mathbb{N}_2 \mid = 2$, autrement C_3 ou $C_3^\star$ est un sous-tournoi de $Inv(X, D_5)$. On peut supposer que $\mid X \cap \mathbb{N}_2 \mid = \{0,1\}$. Dans ce cas, $Inv(X, D_5)$ admet comme sous-tournoi, le 3-cycle $C(0,4,3)$ si $X = \{0,1,3,4\}$, le 3-cycle $C(2,3,4)$ sinon. Contradiction.

□

Lemme 5.4.2. *Pour tout $n \geq 2$, le singleton $\{\{2i : 0 \leq i \leq n\}\}$ est l'unique ensemble transcritique du tournoi U_{2n+1}. En particulier, $i(U_{2n+1}) = 1$ et $\mathcal{O}_{2n+1}$ est l'unique ordre critique de U_{2n+1}.*

Preuve. Le tournoi U_{2n+1} étant non transitif avec $Inv(\{2i : 0 \leq i \leq n\}, U_{2n+1}) = \mathcal{O}_{2n+1}$, alors $i(U_{2n+1}) = 1$ et $\{\{2i : 0 \leq i \leq n\}\}$ est un ensemble transcritique de U_{2n+1}. Soit $\{X\}$ un singleton transcritique de T. Nous montrons que $\{2i : 0 \leq i \leq n\} \subseteq X$. Supposons qu'il existe un $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $2i \notin X$. Pour tout $j \in \mathbb{N}_n - \{i\}$, $C(2i, 2j, 2j+1)$ est un 3-cycle de U_{2n+1} si $j < i$, et $C(2i, 2j-1, 2j)$ est un 3-cycle de U_{2n+1} si $j > i$. Il s'ensuit que $\{2j, 2j+1\} \subseteq X$ pour $j < i$, et $\{2j-1, 2j\} \subseteq X$ pour $j > i$ de sorte que $X = \mathbb{N}_{2n} - \{2i\}$. Comme $U_{2n+1} - 2i$ abrite le tournoi autodual U_{2n-1}, alors $Inv(X, U_{2n+1})$ abrite également U_{2n-1}. Le tournoi U_{2n-1} n'étant pas transitif,

$Inv(X, U_{2n+1})$ n'est pas transitif, contradiction. Ainsi $\{2i : 0 \leq i \leq n\} \subseteq X$. Il s'ensuit que $X = \{2i : 0 \leq i \leq n\}$. Autrement il existe un sommet impair $k \in X$ et donc $C(k+1, k, k-1)$ est un 3-cycle de $Inv(X, U_{2n+1})$, contradiction.

$\square$

Lemme 5.4.3. $i(B_6) = 2$

Preuve. Le tournoi B_6 est non transitif avec $Inv((\{1,2,3\}, \{1,4,5\}), B_6) = 3 < 5 < 0 < 2 < 1 < 4$. Il s'ensuit que $1 \leq i(B_6) \leq 2$. Supposons que $i(B_6) = 1$. Il existe alors $X \subset \mathbb{N}_5$ tel que le tournoi $Inv(X, B_6)$ est transitif. La permutation σ de $\mathbb{N}_4$ définie par $(\sigma(0), \sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)) = (1,4,2,0,3)$ est un isomorphisme de $B_6 - 5$ sur U_5. Il s'ensuit, d'après le lemme 5.4.2 et la remarque 5.1.1, que $X \cap \mathbb{N}_4 = \{1,2,3\}$. Ainsi $X = \{1,2,3\}$ ou $\{1,2,3,5\}$. Contradiction car $C(5,0,4)$ est un 3-cycle de $Inv(\{1,2,3\}, B_6)$ et $C(3,2,5)$ est un 3-cycle de $Inv(\{1,2,3,5\}, B_6)$.

$\square$

Lemme 5.4.4. *Pour tout $n \geq 2$, $i(V_{2n+1}) = 2$.*

Preuve. Comme $V_{2n+1} = Inv((\{2i : 0 \leq i \leq n\}, \{2i : 0 \leq i \leq n-1\}), \mathcal{O}_{2n+1})$, alors $i(V_{2n+1}) \leq 2$. Comme V_{2n+1} abrite V_5, il suffit, d'après la remarque 5.1.1, de montrer que $i(V_5) = 2$. Le tournoi V_5 étant non transitif, $1 \leq i(V_5) \leq 2$. Supposons qu'il existe $X \subset \mathbb{N}_4$ telle que le tournoi $Inv(X, V_5)$ est transitif. On a $4 \in X$, sinon, comme $C(4,0,1)$ et $C(4,2,3)$ sont des 3-cycles de V_5, alors $\{0,1\} \subset X$ et $\{2,3\} \subset X$ de sorte que $X = \mathbb{N}_3$ et donc $C(2,1,4)$ est un 3-cycle de $Inv(X, V_5)$. On a aussi $\mid \{0,1\} \cap X \mid = 1$ et $\mid \{2,3\} \cap X \mid = 1$, sinon, au dual près, $C(4,0,1)$ ou $C(4,2,3)$ est un 3-cycle de $Inv(X, V_5)$. On pose $\{i\} = \{0,1\} \cap X$ et $\{j\} = \{2,3\} \cap X$. On a $\{i,j\} \neq \{1,2\}$, autrement $C(4,0,3)$ est un 3-cycle de $Inv(X, V_5)$. Il existe alors un sommet k de V_5 avec $i < k < j$. On a bien $C(i,k,j)$ est un 3-cycle de $Inv(X, V_5)$, contradiction.

$\square$

Lemme 5.4.5. *Si T est un tournoi régulier d'ordre ≥ 5, alors $i(T) \geq 2$.*

Preuve. Soit T un tournoi régulier d'ordre ≥ 5, T est d'ordre $2n+1$, où $n \geq 2$. Le tournoi T n'étant pas transitif, $i(T) \geq 1$. Supposons que $i(T) = 1$. Il existe alors une partie propre X de $S(T)$ telle que le tournoi $Inv(X, T)$ est transitif. D'une part tous les sommets de T sont de même score n, d'autre part un tournoi transitif de même ordre que T admet un unique sommet de score n. De plus, pour tout $z \in S(T) - X$, $s_T(z) = s_{Inv(X,T)}(z)$. Il s'ensuit que $\mid S(T) - X \mid = 1$. On pose $S(T) - X = \{\gamma\}$. Comme $s_T(\gamma) = n \geq 2$, il existe $x \neq y \in X$ tel que $\{(\gamma, x), (\gamma, y)\} \subseteq A(T)$. Comme $s_{T-\gamma}(x) = s_{T-\gamma}(y) = n$, alors on a bien $s_{Inv(X,T)}(x) = s_{Inv(X,T)}(y) = n - 1$. Contradiction car dans un tournoi transitif, deux sommets distincts ont toujours des scores différents.

□

Corollaire 5.4.1. *Pour tout* $n \geq 2$, $i(T_{2n+1}) = 2$.

Preuve. Le tournoi T_{2n+1} étant régulier, d'ordre ≥ 5, avec $Inv((\{2i : 0 \leq i \leq n\}, \{2i+1 : 0 \leq i \leq n-1\}), T_{2n+1}) = \mathcal{O}_{2n+1}$, d'après le lemme 5.4.5, $i(T_{2n+1}) = 2$.

□

Lemme 5.4.6. $i(C_6) = 2$

Preuve. Le tournoi C_6 étant non transitif avec $Inv((\{0,2\},\{3,5\}), C_6) = \mathcal{O}_6$, alors $1 \leq i(C_6) \leq 2$. Supposons que $i(C_6) = 1$ et soit X une partie de $\mathbb{N}_5$ telle que le tournoi $Inv(X, C_6)$ est transitif. Forcément $\mid X \cap \mathbb{N}_2 \mid = \mid X \cap \{3,4,5\} \mid = 2$. On peut supposer que $X = \{0,1,3,4\}$. Dans ce cas $C(3,1,2)$ est un un 3-cycle de $Inv(X, C_6)$, contradiction.

□

5.5 Preuve du théorème 5.1.3

5.5.1 Formalisme relationnel

À chaque tournoi $T := (S, A)$ et à chaque suite $U := (U_i)_{0 \leq i < n}$ de n relations unaires de base S, où $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on associe la structure relationnelle $T^U := (S,\ A,\ U_1,\ \cdots,\ U_n)$. On identifie chaque U_i à l'ensemble $\{x \in S : U_i(x) = 1\}$ et on identifie U à la suite $(\{x \in S : U_i(x) = 1\})_{0 \leq i < n}$. On note par T_U le graphe orienté défini sur S comme suit : pour tous $x \neq y \in S$, $T_U(x, x) := 0$ et $T_U(x, y) := T(x, y) + \sum_{i=0}^{n-1} U_i(x)U_i(y)$, où les sommes sont prises modulo 2. Nous montrons que T_U est le tournoi obtenu à partir de T en inversant les parties U_i de la suite U.

Lemme 5.5.1. *Étant donnés un tournoi $T := (S, A)$ et une suite $U := (U_i)_{0 \leq i < n}$ de n relations unaires de base S, alors T_U est un tournoi et on a $T_U = Inv(U, T)$.*

Preuve. Nous raisonnons par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 1$, il est clair que $T_U = Inv(U_0, T) = Inv(U, T)$. Soit maintenant un entier $n \geq 2$ et soient x et y deux sommets distincts de S. On a $T_U(x, x) = Inv(U, T)(x, x) = 0$. De plus, $Inv(U, T)(x, y) = Inv((U_i)_{0 \leq i < n-1},\ T)(x, y) + U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)$, il s'ensuit par hypothèse de récurrence que $Inv(U, T)(x, y) = T_{(U_i)_{0 \leq i < n-1}}(x, y) + U_{n-1}(x)U_{n-1}(y)$, c'est-à-dire $Inv(U, T)(x, y) = T(x, y) + \sum_{i=0}^{n-1} U_i(x)U_i(y) = T_U(x, y)$.

□

5.5.2 Belordre et bornes

Une classe *préordonnée* est une classe munie d'un *préordre*, c'est-à-dire d'une relation binaire réflexive et transitive, notée $\leq$. Deux éléments x et y d'une classe préordonnée sont *comparables* si $x \leq y$ ou $y \leq x$; sinon, ils sont *incomparables* . Une *antichaîne* dans une classe préordonnée est une sous-classe dont les éléments sont deux à deux incomparables. Une classe *belordonnée* est une classe préordonnée telle que de toute suite infinie d'éléments de la classe, on peut extraire une sous-suite croissante. Les classes de tournois, de relations binaires ou de structures relationnelles que nous considérons sont préordonnées par l'abritement. À une classe héréditaire $\mathcal{T}$ de tournois finis, on associe la classe $\mathcal{T}[1]$ des structures relationnelles $T^U := (S(T), A(T), U)$, où T est un tournoi de la classe $\mathcal{T}$, et U est une relation unaire de base $S(T)$. La classe $\mathcal{T}$ est *1-belordonnée* lorsque la classe $\mathcal{T}[1]$ est belordonnée.

M. Pouzet [28] a établi une relation entre belordre et finitude des bornes d'une classe héréditaire. Dans le cas des tournois, elle conduit à l'énoncé suivant.

Proposition 5.5.1. *À des isomorphismes près, une classe 1-belordonnée $\mathcal{T}$ de tournois finis n'a qu'un nombre fini de bornes.*

Preuve. Supposons que la classe $\mathcal{T}$ admet une suite infinie de bornes $(T_n := (S_n, A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ deux à deux non isomorphes. Pour chaque entier k, on prend un sommet $x_k \in S_k$ et on définit la structure relationnelle $T(x_k) := (S_k - \{x_k\}, A(T_k - x_k), U_k)$, où U_k est la relation unaire de base $S_k - \{x_k\}$ et correspondant à l'ensemble $V^+_{T_k}(x_k)$. On a $T_k - x_k \in \mathcal{T}$ et donc $T(x_k) \in \mathcal{T}[1]$. La classe $\mathcal{T}$ étant 1-belordonnée, de la suite $(T(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une suite croissante. Il existe alors deux entiers $i < j$ avec un plongement f de $T(x_i)$ dans $T(x_j)$. L'application $\overline{f}$ prolongeant f au sommet x_i en posant $\overline{f}(x_i) := x_j$, est clairement un plongement de T_i dans T_j. Contradiction car deux bornes non isomorphes sont incomparables par l'abritement.

$\square$

5.5.3 Le lemme de Higman

Nous utilisons le lemme de Higman [19] pour montrer que la classe $I_n^{<\omega}$ est 1-belordonnée en codant les éléments de la classe $I_n^{<\omega}[1]$ par des *mots* finis sur un *alphabet* fini.

Afin d'énoncer ce lemme, rappelons qu'un alphabet est simplement un ensemble dont les éléments sont appelés *lettres*. Si $\mathcal{E}$ est un alphabet, un mot sur $\mathcal{E}$ est une suite finie de lettres. Nous convenons qu'il y a un mot sans lettre, le mot *vide*, que nous notons par exemple λ. Nous notons $\mathcal{E}^\star$, l'ensemble des mots finis sur $\mathcal{E}$. Nous munissons $\mathcal{E}^\star$ de l'*ordre des sous-mots*. Le mot vide est un sous-mot de tout mot et si $u_a := a_1...a_m$ et $u_b := b_1...b_n$ sont deux mots non vides, on dit que u_a est un sous-mot de u_b (ou que u_a s'abrite dans u_b), et on note $u_a \preceq u_b$, s'il existe une application strictement croissante α de $\{1, \cdots, m\}$ dans $\{1, \cdots, n\}$ telle que pour tout $1 \leq i \leq m$, on a $a_i = b_{\alpha(i)}$.

Lemme 5.5.2 ([19]). *Si $\mathcal{E}$ est un alphabet fini, alors $\mathcal{E}^\star$ est belordonné pour l'ordre des sous-mots.*

Étant donnée une classe $\mathcal{C}$ de structures relationnelles, on dit qu'une application f de $\mathcal{E}^\star$ dans un ensemble de structures relationnelles est une $\mathcal{E}^\star$-couverture de $\mathcal{C}$ si :

- Toute structure relationnelle de $\mathcal{C}$ est isomorphe à un élément de l'image de f.
- f préserve l'abritement, c'est-à-dire, pour tous a, $b \in \mathcal{E}^\star$, si a s'abrite dans b, alors $f(a)$ s'abrite dans $f(b)$.

Notons alors la remarque suivante.

Remarque 5.5.1. *Si $\mathcal{E}$ est un alphabet fini et si f est une $\mathcal{E}^\star$-couverture d'une classe $\mathcal{C}$ de structures relationnelles, comme l'image par f d'une suite croissante est une suite croissante, il découle du lemme 5.5.2 que la classe $\mathcal{C}$ est belordonnée pour l'abritement.*

Corollaire 5.5.1. *La classe $I_n^{<\omega}$ est 1-belordonnée.*

Preuve. Comme toute sous-classe d'une classe 1-préordonnée est également une classe 1-préordonnée, nous pouvons supposer que n est assez grand. Nous prenons alors $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. On considére l'ensemble $J_n^{<\omega}$ des tournois $Inv((U_i)_{0 \leq i \leq n-1}, \mathcal{O}_m)$, où

$m \in \mathbb{N}$, et $(U_i)_{0\leq i\leq n-1}$ est une suite de n parties de $S(\mathcal{O}_m)$. Chaque structure relationnelle de la classe $I_n^{<\omega}[1]$ est isomorphe à une structure relationnelle de l'ensemble $J_n^{<\omega}[1]$. Il suffit alors de construire une application surjective f de $\mathcal{E}^\star$ dans $J_n^{<\omega}[1]$ qui préserve l'abritement, où $\mathcal{E} := 2^{\mathbb{N}_n}$, $2^{\mathbb{N}_n}$ étant l'ensemble des applications de $\mathbb{N}_n$ dans $\{0,1\}$. En effet, une telle surjection est clairement une $\mathcal{E}^\star$-couverture de la classe $I_n^{<\omega}[1]$ qui sera, d'après la remarque 5.5.1, belordonnée. Soit $T^{U_n} \in J_n^{<\omega}[1]$, où $T := Inv((U_i)_{0\leq i\leq n-1}, \mathcal{O}_m)$, $m \in \mathbb{N}$ et où U_n est une relation unaire sur $S(\mathcal{O}_m)$. Lorsque le tournoi T est vide, c'est-à-dire $T = \mathcal{O}_0$ et $U_n = \emptyset$, on pose $f(\lambda) := T^{U_n} = \mathcal{O}_0^\emptyset = (\emptyset,\emptyset,\emptyset)$. Pour tout mot non vide $u := u_0...u_m \in \mathcal{E}^\star$, on pose $f(u) := (\mathbb{N}_m, A(T), U_n)$, où $T := Inv((U_i)_{0\leq i\leq n-1}, \mathcal{O}_{m+1})$ et pour tout $(i,k) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_m$, $U_i(k) = u_k(i)$. Il est clair que $f(\mathcal{E}^\star) = J_n^{<\omega}[1]$. Montrons que f prérerve l'abritement. Soient u et u' deux mots de $\mathcal{E}^\star$ tels que $u \preceq u'$. Si un de ces mots est vide, par exemple $u = \lambda$, il est clair que $f(u) \leq f(u')$. Supposons alors que les mots u et u' sont non vides et posons $u := u_0...u_m$ et $u' := u'_0...u'_{m'}$. Soit α une application strictement croissante de $\mathbb{N}_m$ dans $\mathbb{N}_{m'}$ telle que pour tout $i \in \{1,\cdots, m\}$, $u_i = u'_{\alpha(i)}$. Nous vérifions que l'injection α réalise un plongement de $f(u) = (\mathbb{N}_m, A(T), U_n)$ dans $f(u') = (\mathbb{N}_{m'}, A(T'), U'_n)$. Soient $k,\ l \in \mathbb{N}_m$. On a $U'_n(\alpha(k)) = u'_{\alpha(k)}(n) = u_k(n) = U_n(k)$ donc α est un plongement de U_n dans U'_n.

Il reste à vérifier que α est un plongement de $A(T)$ dans $A(T')$, c'est-à-dire que $T'(\alpha(k), \alpha(l)) = T(k, l)$. On a $T'(\alpha(k), \alpha(l)) = \mathcal{O}_{m+1}(\alpha(k), \alpha(l)) + \sum_{i=0}^{n-1} u'_{\alpha(k)}(i)u'_{\alpha(l)}(i)$. Comme α est strictement croissante, alors $\mathcal{O}_{m+1}(\alpha(k), \alpha(l)) = \mathcal{O}_{m+1}(k, l)$. Il s'ensuit que $T'(\alpha(k), \alpha(l)) = \mathcal{O}_{m+1}(k, l) + \sum_{i=0}^{n-1} u'_{\alpha(k)}(i)u'_{\alpha(l)}(i) = \mathcal{O}_{m+1}(k, l) + \sum_{i=0}^{n-1} u_k(i)u_l(i) = T(k, l)$.

□

Nous disposons à présent des faits qui prouvent le princicipal résultat de ce paragraphe, le théorème 5.1.3.

Théorème 5.1.3. *Pour chaque entier n, la classe* $I_n^{<\omega}$ *est une sous-classe stricte de la classe des tournois finis. De plus,* $I_n^{<\omega}$ *est déterminée par ses bornes, et celles-ci sont, à des isomorphismes près, en nombre fini.*

Preuve. la classe $I_n^{<\omega}$ est, d'après la proposition 5.2.1, une sous-classe stricte de la classe des tournois finis. S'agissant d'une classe héréditaire de tournois finis, d'après le lemme 5.1.1, la classe $I_n^{<\omega}$ est déterminée par ses bornes. Étant, d'après le corollaire 5.5.1, 1-belordonnée, la classe $I_n^{<\omega}$ admet, à des isomorphismes près, un nombre fini de bornes par la proposition 5.5.1.

□

5.6 La classe $I_1^{<\omega}$

Théorème 5.6.1. *À des isomorphismes près, les bornes de la classe* $I_1^{<\omega}$ *sont* D_5*,* T_5*,* V_5*,* C_6 *et* B_6*.*

Preuve. D'après les lemmes 5.4.1, 5.4.3, 5.4.4, 5.4.6 et le corollaire 5.4.1, $i(D_5) = i(T_5) = i(V_5) = i(C_6) = i(B_6) = 2$. Il s'ensuit qu'aucun de ces tournois n'est dans la classe $I_1^{<\omega}$. Pour $x \in \mathbb{N}_4$, les tournois $D_5 - x$, $T_5 - x$ et $V_5 - x$ étant chacun d'ordre 4, d'après la remarque 5.1.2, ces tournois sont dans la classe $I_1^{<\omega}$. Les tournois D_5, T_5 et V_5 sont donc des bornes de la classe $I_1^{<\omega}$. Pour tout $x \in \mathbb{N}_5$, $B_6 - x \simeq U_5$ et donc $B_6 - x$ est dans la classe $I_1^{<\omega}$ d'après le lemme 5.4.2. Il s'ensuit que B_6 est une borne de $I_1^{<\omega}$. Pour tout $x \in \mathbb{N}_5$, $C_6 - x$ est isomorphe à $\mathcal{O}_3(C_3, \mathbb{1}(3), \mathbb{1}(4))$ ou à $\mathcal{O}_3(\mathbb{1}(3), \mathbb{1}(4), C_3)$. Chacun de ces derniers tournois étant d'indice 1, le tournoi C_6 est une borne de $I_1^{<\omega}$.

Réciproquement, soit G une borne de la classe $I_1^{<\omega}$. D'après la remarque 5.1.2, le tournoi G est d'ordre au moins 5. Supposons d'abord que G est indécomposable. Si G abrite V_5, comme V_5 est une borne de $I_1^{<\omega}$, alors $G \simeq V_5$. Si G n'abrite pas V_5, d'après le théorème 5.1.5, G est isomorphe à B_6, P_7, T_{2n+1} ou U_{2n+1}, où $n \geq 2$. Comme d'après le lemme 5.4.2, U_{2n+1} est un tournoi de la classe $I_1^{<\omega}$, alors G n'est pas isomorphe à U_{2n+1}. De même G n'est pas isomorphe à P_7 car P_7 abrite strictement la borne B_6 de $I_1^{<\omega}$. Si $G \simeq T_{2n+1}$, alors $n = 2$ car pour $n \geq 3$, la borne T_5 est un sous-tournoi propre de T_{2n+1}. Supposons maintenent que le tournoi G est décomposable et fortement connexe. D'après le théorème 5.1.4, G s'écrit sous la forme $G = T(T_0, \cdots, T_n)$, où $n \geq 2$, T est un tournoi indécompasable défini sur $\mathbb{N}_n$ et les T_i sont des tournois finis et non vides. Comme G abrite le tournoi indécomposable T, alors $i(T) = 1$. D'après la remarque 5.1.2 et le thérème 5.1.5, et tenant compte des indices des tournois de ce théorème, on a $T \simeq C_3$ ou U_5. Supposons par l'absurde que $T \simeq U_5$. Dans ce cas, au moins un des tournois T_0, T_1, T_2, T_3 ou T_4 est non transitif. Autrement, si par exemple $T = U_5$, alors $Inv(S(T_0) \cup S(T_2) \cup S(T_4), G)$ est un tournoi transitif, en particulier $i(G) = 1$, contradiction. Soit alors un indice $i \in \mathbb{N}_4$ tel que le tournoi T_i abrite un 3-cycle $C(x, y, z)$. Par le sommet i du tournoi T passe un 3-cycle $C(i, j, k)$ de T. Soit $t_j \in S(T_j)$ et soit $t_k \in S(T_k)$. D'une part $G(\{x, y, z, t_j, t_k\})$ est un sous-tournoi propre de G, d'autre part $G(\{x, y, z, t_j, t_k\})$ est isomorphe à la borne D_5 de la classe $I_1^{<\omega}$. Contradiction. Il s'ensuit que $T \simeq C_3$. Au moins un des tournois T_0, T_1 ou T_2 est non transitif, autrement $i(G) = 1$. Ainsi G abrite la borne D_5 de $I_1^{<\omega}$ et donc $G \simeq D_5$. Supposons enfin que la borne G est non fortement connexe. D'après le théorème 5.1.4, $G = \mathcal{O}_{n+1}(T_0, \cdots, T_n)$, où $n \geq 1$ et les T_i sont des tournois finis, non vides et fortement connexes. Comme le tournoi G n'est pas transitif, il existe au moins un indice $i \in \mathbb{N}_n$ tel que le tournoi T_i abrite un 3-cycle. De plus, il existe

$j \in \mathbb{N}_n - \{i\}$ tel que T_j abrite aussi un 3-cycle. Autrement, $i(G) = i(T_i) \geq 2$ et donc T_i est un sou-tournoi propre de G qui n'est pas dans la classe $I_1^{<\omega}$, ce qui contredit le fait que G est une borne de $I_1^{<\omega}$. Il s'ensuit que le tournoi G abrite la borne C_6 de $I_1^{<\omega}$ et donc $G \simeq C_6$.

□

Du lemme 5.1.1 et du théorème 5.6.1, nous déduisons :

Corollaire 5.6.1. $I_1^{<\omega} = Forb(\{T_5, V_5, D_5, B_6, C_6\})$.

Nous terminons ce paragraphe par une description morphologique des tournois finis d'indice 1, c'est-à-dire, des tournois non transitifs de la classe $I_1^{<\omega}$. Nons montrons en outre, qu'un tournoi d'indice 1 abritant U_5, admet un unique singleton transcritique et, en particulier, un unique ordre critique. Nous introduisons alors la classe $\mathcal{U}$ des tournois finis T qui s'écrivent sous la forme : $T = \mathcal{O}_n(T^0, \cdots, T^{n-1})$, où $n \in \{1, 2, 3\}$, les tournois T^i sont non vides, et où il existe un indice $k \in \mathbb{N}_{n-1}$ tel que :

- $T^k = U_{2m+1}(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^{2m})$, où $m \geq 1$ et les $\mathcal{O}^i$ sont des tournois finis, non vides et transitifs.
- Si $j \in \mathbb{N}_{n-1} - \{k\}$, alors T^j est un tournoi fini et transitif.

Notons que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \cup \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 \cup \mathcal{U}_3$, les $\mathcal{U}_i$ étant les classes de tournois définis comme suit, où $m \geq 1$ et $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ et les $\mathcal{O}_i$ sont des tournois finis, non vides et transitifs :

1. $\mathcal{U}_0$ est la classe des tournois $U_{2m+1}(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^{2m})$;

2. $\mathcal{U}_1$ est la classe des tournois $\mathcal{O}_2(U_{2m+1}(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^{2m}), \mathcal{O})$;

3. $\mathcal{U}_2$ est la classe des tournois $\mathcal{O}_2(\mathcal{O}, U_{2m+1}(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^{2m}))$;

4. $\mathcal{U}_3$ est la classe des tournois $\mathcal{O}_3(\mathcal{O}, U_{2m+1}(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^{2m}), \mathcal{O}')$.

Proposition 5.6.1. *À des isomorphismes près, les tournois finis d'indice 1, sont les tournois de la classe* $\mathcal{U}$*. De plus un tournoi de* $\mathcal{U}$ *qui abrite* U_5 *admet un unique singleton transcritique et donc un unique ordre critique.*

Preuve. Soit $T := \mathcal{O}_n(T^0, \cdots, T^{n-1})$ un tournoi de la classe $\mathcal{U}$ avec un indice k tel que $T^k = U_{2m+1}(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^{2m})$, où $m \geq 1$ et les $\mathcal{O}^i$ sont des tournois finis, non vides et transitifs. Il est clair que $\{\bigcup_{i=0}^{m} S(\mathcal{O}^{2i})\}$ est un singleton transcritique de T. Comme le tournoi T n'est pas transitif, il s'ensuit que $i(T) = 1$. Notons que le tournoi T abrite U_5 si et seulement si $m \geq 2$. Supposons alors que $m \geq 2$ et soit $\{X\}$ est un singleton transcritique de T. D'après la remarque 5.1.1, $\{X \cap S(T^k)\}$ est un singleton transcritique de T^k. En ulilisant le lemme 5.4.2, le seul singleton transcritique de T^k est $\{\bigcup_{i=0}^{m} S(\mathcal{O}^{2i})\}$. Ainsi, $X \cap S(T^k) = \bigcup_{i=0}^{m} S(\mathcal{O}^{2i})$. Supposons par l'absurde qu'il existe un indice $i \in \mathbb{N}_{n-1} - \{k\}$ avec un sommet $x_i \in S(T^i) \cap X$. Pour $(y_0, y_1, y_2) \in S(\mathcal{O}^0) \times S(\mathcal{O}^1) \times S(\mathcal{O}^2)$, (x_i, y_1, y_2) (resp. (x_i, y_0, y_1)) est un 3-cycle de $Inv(X, T)$ si $i < k$ (resp. si $i > k$), contradiction. Le tournoi T admet alors un seul ensemble transcritique et donc un seul ordre critique.

Réciproquement, soit T un tournoi fini d'indice 1. Supposons d'abord que T est fortement connexe. D'après le théorème 5.1.4, le tournoi T s'écrit sous la forme $T = H(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^q)$, où $q \geq 2$, H est un tournoi indécomposable défini sur $\mathbb{N}_q$ et les $\mathcal{O}^i$ sont des tournois finis et non vides. Le tournoi H étant indécomposable d'ordre ≥ 3, il abrite un 3-cycle. Il s'ensuit que les tournois $\mathcal{O}^i$ sont transitifs, autrement T abrite la borne D_5 de la classe $I_1^{<\omega}$, contradiction. Ou bien $H \simeq C_3 = U_3$, ou bien H est un tournoi d'ordre ≥ 5 n'abritant pas V_5. Dans ce deuxième cas, en utilisant le théorème 5.1.5, et en tenant compte des indices des tournois de ce théorème, on obtient que $H \simeq U_{2m+1}$ pour un $m \geq 2$. On conclut que $H \simeq U_{2m+1}$, où $m \geq 1$. Il s'ensuit que $T = U_{2m+1}(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^{2m})$, où $m \geq 1$ et où les $\mathcal{O}^i$ sont des tournois finis, non vides et transitifs, c'est-à-dire $T \in \mathcal{U}_0$. Supposons maintenant que le tournoi T est non fortement connexe. D'après le théorème 5.1.4, $T \simeq \mathcal{O}_n(T^0, \cdots, T^{n-1})$, où $n \geq 2$ et les T^i sont des tournois finis, non vides et fortement connexes. Le tournoi T n'étant pas transitif, il existe un indice $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, tel que T^k abrite un 3-cycle. Le tournoi T^k est alors un tournoi fortement connexe d'indice 1. D'après ce qui précède, $T^k = U_{2m+1}(\mathcal{O}^0, \cdots, \mathcal{O}^{2m})$, où $m \geq 1$ et les $\mathcal{O}^i$ sont des tournois finis, non vides et transitifs. Pour tout $j \in \mathbb{N}_{n-1} - \{k\}$, le tournoi T^j est transitif, sinon T abrite la borne

C_6 de $I_1^{<\omega}$, contradiction. Remarquons que chacun des tournois T^j, où $j \in \mathbb{N}_{n-1} - \{k\}$ est d'ordre 1 puisqu'il s'agit d'un tournoi non vide, transitif et fortement connexe. Le tournoi T est un tournoi de la classe $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ ou $\mathcal{U}_3$, suivant que $k = 0$, $k = n-1$ ou que $0 < k < n-1$ respectivement.

$\square$

5.7 Tournoi universel de la classe $I_n^{\leq\omega}$

5.7.1 Préliminaires

Nous construisons un tournoi (dénombrable) $W(n)$ de la classe $I_n^{\leq\omega}$ qui abrite tous les tournois de cette classe. Un tel tournoi est un tournoi universel de la classe $I_n^{\leq\omega}$.

Soit E un ensemble fini et non vide. Une *chaîne E-coloriée* (ou chaîne coloriée par E) est un triplet $(S, \prec, l)$ dans lequel $\prec$ est une relation d'ordre total strict sur l'ensemble S et l est une application de S dans E. On dit que l'application l est une *coloration* de la chaîne. À chaque tournoi transitif $T := (S, A)$ et à chaque application l de S dans E, est associée la chaîne E-coloriée $l(T) := (S, A, l)$, où l'on a identifié A à la relation d'ordre toral strict associée au tournoi T. On rappelle que pour tout entier n, $2^{\mathbb{N}_n}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{N}_n$ dans $\{0, 1\}$. À la chaîne $2^{\mathbb{N}_{n-1}}$- coloriée $l(T)$, où $n \geq 1$, est associée la structure relationnelle

$T^l = (S, A, U^l) := (S,\ A,\ U_0^l,\ \cdots,\ U_{n-1}^l)$ dans laquelle $U^l := (U_i^l)_{0 \le i \le n-1}$ est une suite de n relations unaires sur S définies comme suit : pour $x \in S$ et pour $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $U_i^l(x) = 1$ si et seulement si $l(x)(i) = 1$.

On considère deux tournois transitifs $T := (S, A)$ et $T' := (S', A')$, avec des chaînes $l(T) := (S, A, l)$ et $l'(T') := (S', A', l')$ coloriées par un même ensemble E. Un isomorphisme de $l(T)$ sur $l'(T')$ (resp. un plongement de $l(T)$ dans $l'(T')$) est un isomorphisme f de T sur T' (resp. un plongement f de T dans T') qui préserve les couleurs, c'est-à-dire, tel que pour tout $x \in S$, $l(x) = l'(f(x))$. Un automorphisme de $l(T)$ est un isomorphisme de $l(T)$ sur elle-même. Le *domaine* d'un plongement f de $l(T)$ dans $l'(T')$ est la base de T. Pour $X \subseteq \overline{X}$ et pour des plongements g et $\overline{g}$ dans $l'(T')$ de domaines respectifs X et $\overline{X}$, lorsque pour tout $x \in X$, $\overline{g}(x) = g(x)$, on dit que $\overline{g}$ est un *prolongement* de g.

Étant donnée une partie X de S, la *sous-chaîne* de $l(T)$ induite par X est la chaîne E-coloriée $l(T(X)) := (X, A(T(X)), l_X)$, où l_X est la restriction de l à X. Lorsqu'un isomorphisme de $l(T)$ sur $l'(T')$ existe, on dit que $l(T)$ et $l'(T')$ sont isomorphes. Notons qu'un plongement de $l(T)$ dans $l'(T')$ est un isomorphisme de $l(T)$ sur une sous-chaîne de $l'(T')$. Lorsqu'un tel plongement existe, $l(T)$ est isomorphe à une sous-chaîne de $l'(T')$, on dit que $l'(T')$ abrite $l(T)$ ou que $l(T)$ s'abrite dans $l'(T')$.

Un *isomorphisme local* de $l(T)$, de domaine X, où $X \subseteq S$, est un plongement f, dans $l(T)$, de la sous-chaîne $l(T(X))$. On dit que f se prolonge en un isomorphisme local de domaine X', où $X \subseteq X' \subseteq S$, lorsqu'il existe un plongement $\overline{f}$ dans $l(T)$ de la sous-chaîne $l(T(X'))$, tel que pour tout $x \in X$, $\overline{f}(x) = f(x)$. On dit alors que $\overline{f}$ *prolonge* f au domaine X'. La chaîne E-coloriée $l(T)$ est dite *homogène* si tout isomorphisme local de $l(T)$ de domaine fini se prolonge en un automorphisme de $l(T)$. Un tournoi transitif T, à au moins deux sommets, est *dense* lorsque pour tous $x < y \in S(T)$, il existe $z \in S(T)$, tel que $x < z < y$. Nous généralisons cette définition aux chaînes coloriées comme suit. Une chaîne E-coloriée $l(T)$, à au moins deux sommets, est dense lorsque pour tous $x < y \in S(T)$ et pour tout $c \in E$, il existe $z \in S(T)$ tel que $x < z < y$ et $l(z) = c$. Notons qu'une chaîne coloriée dense est forcément infinie. Rappelons qu'étant donné un sommet a du tournoi transitif T, a est un *plus grand élément* (resp. *plus petit élément*) de T (ou de $l(T)$), si pour tout $x \in S(T)$, $x < a$ (resp. $a < x$). Un élément *extrême* de T (ou de $l(T)$) est un plus petit ou plus grand élément de T. Pour un tournoi transitif dense, nous notons $\overset{o}{T}$ le tournoi obtenu à partir de T en supprimant ses éventuels éléments extrêmes. Il s'agit du sous-tournoi de T induit par l'ensemble de ses sommets non extrêmes. Notons la remarque suivante.

Remarque 5.7.1. *Étant donnée une chaîne E-coloriée et dense $l(T)$, la chaîne E-coloriée $l(\overset{o}{T})$ est dense et sans aucun élément extrême.*

Proposition 5.7.1. *Toute chaîne coloriée dénombrable dense et sans aucun élément extrême, est homogène.*

Preuve. Soit $l(T)$ une chaîne E-coloriée dénombrable, dense et sans aucun élément extrême. On note $<$ la relation d'ordre total strict associée à T. Nous partons d'une partie finie et non vide F de $S(T)$ avec un isomorphisme local f de $l(T)$ de domaine F. Nous montrons que f se prolonge en un automorphisme de $l(T)$. Notons la remarque suivante. Pour tout $u \in S(T) - F$, il existe un prolongement $\overline{f}$ de f au domaine $F \cup \{u\}$. En effet, en posant $T(F) := e_1 < \cdots < e_n$, où $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, comme T n'admet pas un élément extrême, il existe des sommets e_0 et e_{n+1} de T tels que $e_0 < e_1 < \cdots < e_n < e_{n+1}$ et tels qu'il existe un indice $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $e_i < u < e_{i+1}$. La chaîne E-coloriée $l(T)$ étant dense avec $f(e_i) < f(e_{i+1})$, il existe un sommet $\overline{u}$ de T tel que $f(e_i) < \overline{u} < f(e_{i+1})$ et $l(\overline{u}) = l(u)$. Il suffit de prendre $\overline{f}(u) = \overline{u}$. Nous posons $S(T) := \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ et nous construisons par récurrence, en utilisant la remarque ci-dessus, des suites $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(f'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'isomorphismes locaux de $l(T)$, comme suit. Nous désignons d'abord par D_i et D'_i les domaines respectifs de f_i et de f'_i. Les applications f_0 et f'_0 sont des prolongements respectifs de f et de f_0^{-1} aux domaines $D_0 := F \cup \{a_0\}$ et $D'_0 := f_0(D_0) \cup \{a_0\}$. Pour $i \geq 1$, f_i et f'_i sont des prolongements respectifs de f'^{-1}_{i-1} et de f_i^{-1} aux domaines $D_i := f'_{i-1}(D'_{i-1}) \cup \{a_i\}$ et $D'_i := f_i(D_i) \cup \{a_i\}$. Par construction des f_i et d'après la remarque ci-dessus, la permutation σ de $S(T)$, définie par $\sigma(a_i) := f_i(a_i)$, est un automorphisme de $l(T)$ prolongeant l'isomorphisme local f.

$\square$

Le lemme suivant assure l'"universalité" d'une chaîne E-coloriée dénombrable et dense, dans la classe des chaînes E-coloriées finis ou dénombrables.

Lemme 5.7.1. *Soit $l(T)$ une chaîne E-coloriée dénombrable et dense.*

- *Toute chaîne E-coloriée finie ou dénombrable s'abrite dans $l(T)$.*
- *Toute chaîne E-coloriées dénombrable, dense et sans aucun élément extrême est isomorphe à $l(\overset{o}{T})$.*

Preuve. Soit $l'(T')$ une chaîne E-coloriée finie ou dénombrable. Nous montrons que $l'(T')$ s'abrite dans $l(T)$. Comme toute chaîne E-coloriée finie s'abrite dans $l(T)$, on peut supposer que $l'(T')$ est dénombrable. On note $<$ aussi bien la relation d'ordre total strict associée à T que celle associée à T'. Nous désignons par S et S' les bases respectives de T et de T', et nous partons d'une partie finie et non vide F de S' avec un plongement f de $l'(T'(F))$ dans la chaîne E-coloriée dénombrable et dense $l(\overset{o}{T})$. Notons la remarque suivante. Pour tout $u \in S' - F$, il existe un prolongement $\overline{f}$ de

f au domaine $F \cup \{u\}$. En effet, en posant $T'(F) := e_1 < \cdots < e_n$, où $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, ou bien il existe un indice $i \in \{1, \cdots,\ n-1\}$ tel que $e_i < u < e_{i+1}$, ou bien $u < e_1$, ou bien $e_n < u$. Comme $l(\overset{o}{T})$ est dense, lorsque $e_i < u < e_{i+1}$, il existe $\overline{u} \in S$ tel que $f(e_i) < \overline{u} < f(e_{i+1})$ et $l(\overline{u}) = l'(u)$. Il suffit dans ce cas, de prendre $\overline{f}(u) = \overline{u}$. Comme de plus $l(\overset{o}{T})$ est sans éléments extrêmes, lorsque $u < e_1$ (resp. $e_n < u$), on considère un sommet $\overline{v} \in S$ tel que $\overline{v} < f(e_1)$ (resp. $f(e_n) < \overline{v}$) et $l(\overline{v}) = l'(u)$. Il suffit de prendre $\overline{f}(u) = \overline{v}$. Notons que la remarque est valable lorsque l'on remplace $l(\overset{o}{T})$ par une autre chaîne E-coloriée dénombrable et dense.

Nous posons $S' - F := \{a_i : i \in \mathbb{N}\}$ et nous construisons par récurrence, en utilisant la remarque ci-dessus, une suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de plongements dans $l(T)$, comme suit. L'application f_0 est un prolongement de f au domaine $F \cup \{a_0\}$, et pour $i \geq 1$, f_i est un prolongement de f_{i-1} au domaine $F \cup \{a_0, \cdots,\ a_i\}$. Nous considérons alors l'application g de S' dans S définie comme suit. $g(x) := f(x)$ pour $x \in F$, et $g(a_i) := f_i(a_i)$ pour $i \in \mathbb{N}$. L'application g est bien un plongement de $l'(T')$ dans $l(T)$. En effet, pour $x < y \in S'$, il existe $i \in \mathbb{N}$, tel que $x, y \in F \cup \{a_0, \cdots,\ a_i\}$, de sorte que $g(x) = f_i(x)$ et $g(y) = f_i(y)$. Comme f_i est un plongement dans $l(T)$ de domaine $F \cup \{a_0, \cdots,\ a_i\}$, alors $g(x) < g(y)$, $l(g(x)) = l'(x)$ et $l(g(y)) = l'(y)$.

Supposons maintenant que $l'(T')$ est dense et sans aucun élément extrême. Nous montrons que f se prolonge en un isomorphisme de $l'(T')$ sur $l(\overset{o}{T})$. Nous posons $S(\overset{o}{T}) := \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$, $S(T') := \{x'_i : i \in \mathbb{N}\}$ et nous construisons par récurrence, en utilisant la remarque ci-dessus, des suites $(h_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(h'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de plongements respectifs dans $l(\overset{o}{T})$ et dans $l'(T')$, comme suit. Nous désignons d'abord par D_i et D'_i les domaines respectifs de h_i et de h'_i. Les applications h_0 et h'_0 sont des prolongements respectifs de f et de h_0^{-1} aux domaines $D_0 := F \cup \{x'_0\}$ et $D'_0 := h_0(D_0) \cup \{x_0\}$. Pour $i \geq 1$, h_i et h'_i sont des prolongements respectifs de h'^{-1}_{i-1} et de h_i^{-1} aux domaines $D_i := h'_{i-1}(D'_{i-1}) \cup \{x'_i\}$ et $D'_i := h_i(D_i) \cup \{x_i\}$. Par construction des h_i, l'application ϕ de S' sur S , définie par $\phi(x'_i) := h_i(x'_i)$, est un isomorphisme de $l'(T')$ sur $l(\overset{o}{T})$.

□

5.7.2 Construction d'une chaîne coloriée dénombrable et homogène

Soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Nous considérons n nombres réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ tels que $1, \alpha_0, \cdots, \alpha_{n-1}$ soient rationnellemets indépendants, c'est-à-dire, tels que pour tous nombres rationnels $\beta, \beta_0, \cdots, \beta_{n-1}$, si $\beta = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i\alpha_i$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $\beta = \beta_i = 0$.

Pour $f \in 2^{\mathbb{N}_{n-1}}$, on pose $\alpha(f) := \sum_{i=0}^{n-1} f(i)\alpha_i$ et $\mathbb{Q}_f := \mathbb{Q} + \alpha(f)$, où pour $a \in \mathbb{R}$,

$\mathbb{Q} + a := \{r + a : r \in \mathbb{Q}\}$.

Remarque 5.7.2. *Pour tous* $f \neq g \in 2^{\mathbb{N}_{n-1}}$, $\mathbb{Q}_f \cap \mathbb{Q}_g = \emptyset$.

Preuve. Supposons que $\mathbb{Q}_f \cap \mathbb{Q}_g \neq \emptyset$. Il existe alors $r, r' \in \mathbb{Q}$, tels que $r + \alpha(f) = r' + \alpha(g)$. Il s'ensuit que $\sum_{i=0}^{n-1}(f(i) - g(i))\alpha_i = r' - r$. comme les α_i sont rationnellement indépendants, alors $f = g$.

□

On pose $\mathbb{Q}(n) := \bigcup_{f \in 2^{\mathbb{N}_{n-1}}} \mathbb{Q}_f$, et on considère la chaîne $2^{\mathbb{N}_{n-1}}$-coloriée $l_n(\underline{\mathbb{Q}(n)})$, où pour tout $f \in 2^{\mathbb{N}_{n-1}}$ et pour tout $x \in \mathbb{Q}_f$, $l_n(x) := f$. Cette chaîne coloriée est homogène d'après la proposition 5.7.1 et la proposition suivante.

Proposition 5.7.2. *À des isomorphismes près,* $l_n(\underline{\mathbb{Q}(n)})$ *est l'unique chaîne dénombrable* $2^{\mathbb{N}_{n-1}}$*-coloriée, dense et sans aucun élément extrême.*

Preuve. La chaîne dénombrable $2^{\mathbb{N}_{n-1}}$- coloriée $l_n(\underline{\mathbb{Q}(n)})$ est sans aucun élément extrême puisque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(n)$. Soient maintenant $x < x' \in \mathbb{Q}(n)$, et soit $f \in 2^{\mathbb{N}_{n-1}}$. Il existe un $y \in \mathbb{Q}(n)$ tel que $x < y < x'$ et $l_n(y) = f$. En effet, $x = r + \alpha(g)$ et $x' = r' + \alpha(g')$, où $r, r' \in \mathbb{Q}$ et $g, g' \in 2^{\mathbb{N}_{n-1}}$. Il suffit alors de prendre $y = t + \alpha(f)$ où $t \in \mathbb{Q}$ avec $r + \alpha(g) - \alpha(f) < t < r' + \alpha(g') - \alpha(f)$. Enfin, d'après le lemme 5.7.1, une telle chaîne coloriée est, à des isomorphismes près, unique.

□

En utilisant le lemme 5.7.1, nous en déduisons :

Corollaire 5.7.1. *Toute chaîne $2^{\mathbb{N}_{n-1}}$-coloriée, finie ou dénombrable, s'abrite dans $l_n(\underline{\mathbb{Q}(n)})$.*

5.7.3 Le tournoi $W(n)$

À une chaîne $2^{\mathbb{N}_{n-1}}$-coloriée $l(T)$, nous associons le tournoi $T(l) := T_{\bar{l}}$, où $\bar{l} := (\bar{l}_i)_{i\in\mathbb{N}_{n-1}}$ est une suite de n relations unaires de base $S(T)$, définies comme suit. Pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$ et pour tout $x \in S(T)$, $\bar{l}_i(x) := l(x)(i)$. Nous posons alors $W(n) := (\underline{\mathbb{Q}(n)})(l_n)$.

Théorème 5.7.1. *Tout tournoi de la classe $I_n^{\leq\omega}$ s'abrite dans $W(n)$. De plus, $i(W(n)) = n$.*

Preuve. Soit T_U un tournoi de la classe $I_n^{\leq\omega}$, où T est un tournoi transitif et $U := (U_i)_{0\leq i\leq n-1}$ et une suite de n relations unaires de base $S(T)$. On considère la chaîne $2^{\mathbb{N}_{n-1}}$-coloriée $l(T)$, où pour $x \in S(T)$, $l(x)(i) := U_i(x)$. D'après le corollaire 5.7.1, $l(T)$ s'abrite dans $l_n(\underline{\mathbb{Q}(n)})$. Soit alors f un plongement de $l(T)$ dans $l_n(\underline{\mathbb{Q}(n)})$. Nous vérifions que f est aussi un plongement de T_U dans $W(n)$, de sorte que T_U s'abrite dans $W(n)$. L'application f est bien une injection de $S(T_U) = S(T)$ dans $S(W_n) = \mathbb{Q}(n)$. Pour $x \neq y \in S(T)$, $T_U(x,y) = T(x,y) + \sum_{i=0}^{n-1} l(x)(i)l(y)(i)$, et $W(n)(f(x), f(y)) = \underline{\mathbb{Q}(n)}(f(x), f(y)) + \sum_{i=0}^{n-1} l_n(f(x))(i)l_n(f(y))(i)$, où les sommes sont prises modulo 2.

Comme f est un plongement de $l(T)$ dans $l_n(\underline{\mathbb{Q}(n)})$, alors $\underline{\mathbb{Q}(n)}(f(x), f(y)) = T(x, y)$, $l_n(f(x)) = l(x)$ et $l_n(f(y)) = l(y)$. Il s'ensuit que $T_U(x, y) = W(n)(f(x), f(y))$. Ainsi, $W(n)$ abrite tout tournoi de la classe $I_n^{\leq \omega}$. Il s'ensuit, d'après la proposition 5.2.1, que $W(n)$ abrite un tournoi fini d'indice n, de sorte que, d'après la remarque 5.1.1, $i(W(n)) \geq n$. Or, par construction de $W(n)$, $i(W(n)) \leq n$. On a donc $i(W(n)) = n$.

$\square$

Bibliographie

[1] H. Belkhechine, Nombre maximum d'ordres médians d'un tournoi, Mémoire de D.E.A présenté à l'université Paris V (1992).

[2] H. Belkhechine et I. Boudabbous, Indecomposable tournaments and their indecomposable subtournaments on 5 and 7 vertices, Ars Combinatoria, Accepté et à paraître.

[3] H. Belkhechine et I. Boudabbous, Tournois indécomposables et leurs sous-tournois indécomposables à 5 sommets, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 343 (2006) 685-688.

[4] H. Belkhechine, I. Boudabbous et J. Dammak, Morphologie des tournois (-1)-critique, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 663-666.

[5] H. Belkhechine, Imed Boudabbous et J. Dammak, Les tournois (-1)-critiques, Communications in Mathematical Analysis, Volume 2, Number 2, (2007) 83-97.

[6] H. Belkhechine, Imed Boudabbous et Mohamed Baka Elayech, Les graphes (-1)-critiques, Soumis au journal Ars Combinatoria.

[7] J.C. Bermond, Ordres à distance minimum d'un tournoi et graphes partiels sans circuits maximaux, Math. Sci. hum, 37 (1972) 5-25.

[8] I. Boudabbous et P. Ille, Critical and infinite directed graphs, Discrete Math 307 (2007) 2415-2428.

[9] Y. Boudabbous, J. Dammak et P. Ille, Indecomposability and duality of tournaments, Discrete Math, 223 (2000) 55-82.

[10] Y. Boudabbous et P. Ille, Indecomposability graph and critical vertices of an indecomposable graph, Discrete Mathematics (2008).

[11] Y. Boudabbous et M. Pouzet, The morphology of infinite tournaments. Application to the growth of their profile. Proceedings of CGCS 2007, Mai 2007, 25 pages. arXiv :0801.4069, accepté par EJC, 10 décembre 2008.

[12] A. Ehrenfeucht, T. Harju et G. Rozenberg, The theory of 2-structures, A framework for decomposition and transformation of graphs, World Scientific Publishing Co., River Edge, New-Jersey, (1999).

[13] A. Ehrenfeucht et G. Rozenberg, Primitivity is hereditary for 2-structures, Theoret. Comput. Sci, 3(70), (1990) 343-358.

[14] P. Erdös et J.W Moon, On sets of consistent arcs in a tournament, Canadian. Bull. Math, 8 (1965) 269-271.

[15] R. Fraïssé, Theory of relations, Studies in Logic and the Fondation of Mathematics, 145, North-Holland Publishing Co., Amsterdam (2000). North-Holland, (2000).

[16] R. Fraïssé, L'intervalle en théorie des relations, ses généralisations, filtre intervallaire et clôture d'une relation, in : M. Pouzet, D. Richard (Eds.), Orders, Description and Roles, North-Holland, Amsterdam, (1984) 313-342.

[17] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar. 18 (1967) 25-66.

[18] C. Gnanvo et P. Ille, la reconstruction des tournois sans diamants, Z. Math. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 283-291.

[19] G. Higman, Ordering by divisibility in abstract algebras, Proc. London Math. Soc. 2 (1952) 326-336.

[20] P. Ille, Indecomposable graphs, Discrete Math, 173 (1997) 71-78.

[21] P. Ille, 1993, Recognition problem in reconstruction for decomposable relations, B. Sands, N. Sauer, R. Woodrow (Eds.), Finite and Infinite Combinatorics in Sets and Logic, Kluwer Academic Publishers, (1993) 189-198.

[22] W.M. Kantor, Automorphism groups of designs, Math. Z. 109 (1969) 246-252.

[23] M.G. Kendall et B. Babington Smith, On the method of paired comparisons, Biometrika 21 (1939) 324-345.

[24] B.J. Latka, A structure theorem of tournaments omitting N_5, Journal of Graph Theory 42 (2003) 165-192.

[25] G. Lopez et C. Rauzy, Reconstruction of binary relations from their restrictions of cardinality 2, 3, 4 and (n-1). I. Z. Logik Grundlag. Math. 38 (1992) 27-37.

[26] J.W. Moon, Topics on tournaments, Holt, Rinehart and Winston (1968).

[27] J.W. Moon, Tournaments whose subtournaments are irreductible or transitive, Can Math Bull 21 (1979) 75-79.

[28] M. Pouzet, Un belordre d'abritement et ses rapports avec les bornes d'une multirelation, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A 274 (1972) 1677-1680.

[29] M. Pouzet, The profile of relations, Glob. J. Pure Appli. Math. Volume 2, Number 3, (2006) 237-272. (Proceedings of the 14th Symposium of The Tunisian Mathematical Society Held in Hammamet, March 20-23, 2006).

[30] J.H. Schmerl et W.T. Trotter, Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures, Discrete Math. 113 (1993) 191-205.

[31] P. Slater, Inconsistencies in a schedule of paired comparaison, Biomathematica. 48 (1961) 303-312.

[32] S. Thomassé, Communication personnelle.

Index